Листок 1

Что разрешено делать:

- Обсуждать задачи с одноклассниками.
- Обращаться за помощью к преподавателю.
- Использовать компьютер для линейных операций (например, умножение матриц, умножение матрицы на вектор и т.д.), при условии, что вы знаете, как делать это вручную.

Что вы обязаны делать:

- Записывать решения самостоятельно.

Что запрещено делать:

- Копировать записанные решения у одноклассника.
- Использовать ИИ для получения решений.

Задачи

Упражнение 0.1. У Карла скучная жизнь. Он либо проводит час в инстаграме, либо час в TikTok, либо смотрит видео на Youtube о цепях Маркова в течение 5 минут, либо спит 25 минут.

Когда он просыпается, он всегда сначала проверяет Instagram.

Закончив проверять Instagram, он с равной вероятностью либо смотрит Youtube, либо проверяет Tiktok.

Когда он заканчивает с Youtube, он всегда ложится спать, потому что цепи Маркова — это скучно.

Когда он заканчивает с Tiktok, он с равной вероятностью либо проверит Instagram, либо пойдёт спать.

a. Представьте жизнь Карла в виде цепи Маркова, с матрицей переходных вероятностей (стохастической матрицей) и взвешенным графом.
b. Прямо сейчас Карл в Instagram. Найдите вероятность того, что десятым приложением, которое он откроет на своём телефоне, будет Instagram. Например, при рассмотрении переходов I-> Y -> S -> I, вторым открытым приложением является Instagram.
c. После многих лет такой увлекательной жизни, какой процент своего времени он проведёт в Instagram?

Решение

a. Матрица переходных вероятностей P имеет вид (1: Instagram, 2: TikTok, 3: YouTube, 4: Сон)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вот соответствующий граф.

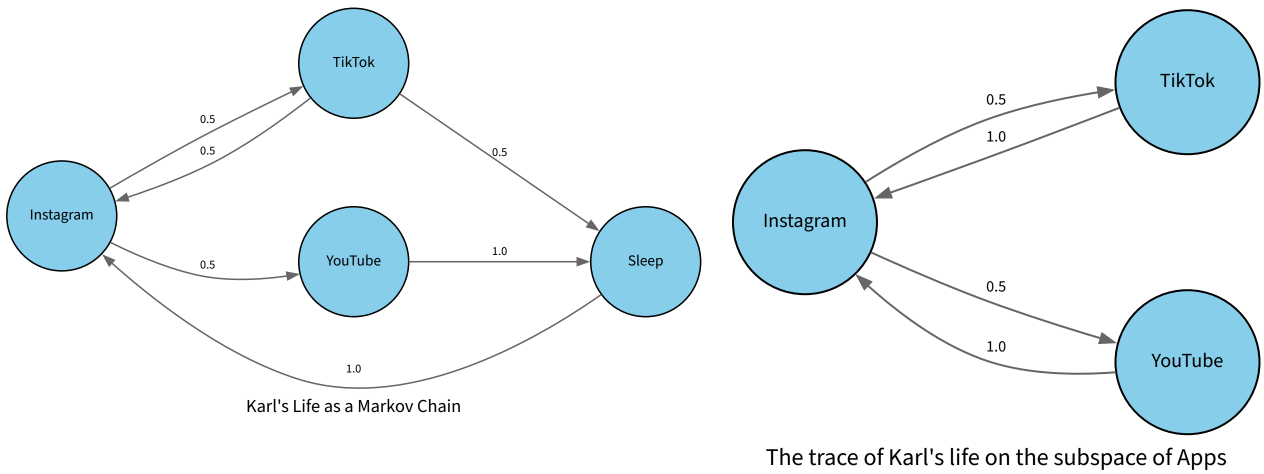

Рисунок 1: Жизнь Карла и след на подпространстве приложений. Каждое второе приложение, которое он использует, — это Instagram.

b. Каждое второе приложение, которое он открывает, — это Instagram, поэтому эта вероятность равна 1.

c. Обозначим через $\mathcal{N}_x$ количество раз, которое Карл посещает состояние x по прошествии многих лет, скажем, после N шагов. Мы понимаем, что задача спрашивает о пределе при $N \to \infty$.

Пусть $\gamma_x = \mathbb{E}_x[\mathcal{N}_x]/N$ — ожидаемое количество раз, которое он находился в состоянии x. Тогда

- Ожидаемое количество посещений YouTube равно половине количества посещений Instagram с точностью до малой (случайной) ошибки: $\gamma_Y = \gamma_I/2 + \varepsilon_Y$.
- Ожидаемое количество посещений TikTok также равно половине количества посещений Instagram с точностью до малой случайной ошибки: $\gamma_T = \gamma_I/2 + \varepsilon_T$.
- Аналогично: $\gamma_S = \gamma_Y + \gamma_T/2 + \varepsilon_S$.
- Аналогично: $\gamma_I = \gamma_S + \gamma_T/2 + \varepsilon_I$.
- Для решения не следует забывать: $\gamma_I + \gamma_Y + \gamma_T + \gamma_S = 1$.

Здесь мы имеем в виду, что ε_x — это некоторая малая ошибка порядка $O(1/N)$, которая возникает из-за того, что Карл начинает в определённом состоянии (Instagram). Так, например, при $N = 1$ мы имеем $\gamma_I = 1$, а все остальные равны 0. Таким образом, мы получаем $\gamma_I = 4/11 + O(1/N)$, $\gamma_Y = 2/11 + O(1/N)$, $\gamma_T = 2/11 + O(1/N)$, $\gamma_S = 3/11 + O(1/N)$. Тогда доля времени, которую он проводит в Instagram, будет равна

$$\frac{\gamma_I * 60 + O(1/N)}{\gamma_I * 60 + \gamma_Y * 5 + \gamma_T * 60 + \gamma_S * 25 + O(1/N)} \simeq 0.5393 + O(1/N) \tag{1}$$

Таким образом, по прошествии многих лет ($N \to \infty$) он проведёт около 54% своей скучной жизни в Instagram.

В качестве более строгой альтернативы мы можем рассмотреть

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} f(X_t) = m(f)$$

где m — инвариантная мера процесса. Фактически, m_x — это не что иное, как главный член вышеупомянутого γ_x, а именно $m_I = 4/11$, $m_Y = m_T = 2/11$, $m_S = 3/11$. Теперь возьмём $f(x)$ как количество времени, которое он проводит каждый раз в состоянии x (например, $f(I) = 60$ минут и т.д.), и $g(x) = f(x)\mathbf{1}_{x=I}$. Тогда мы получаем

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\sum_{t=0}^{T-1} g(X_t)}{\sum_{t=0}^{T-1} f(X_t)} = \frac{m(g)}{m(f)} \simeq 0.5393$$

Упражнение 0.2. Анна только что получила m велосипедов на свой день рождения. Теперь каждый день она будет случайным образом выбирать один велосипед (каждый с вероятностью $1/m$) и возвращаться вечером. Пусть X_t — количество различных велосипедов, которые она использовала после t дней (таким образом, $X_0 = 0$, $X_1 = 1$, но X_2 может быть 1 или 2).

- Объясните, почему (X_t) является цепью Маркова.
- Пусть τ_m — случайное время, в которое она попробует все велосипеды. Является ли это моментом остановки?
- Найдите вероятность $\mathbb{P}(\tau_m = t)$, помня, что $X_0 = 0$.

Решение

a. Вероятность того, что в данный день она воспользуется ранее не использованным велосипедом, зависит только от того, сколько велосипедов она уже использовала, а не от того, какие именно или в каком порядке она их использовала. Таким образом, это цепь Маркова с пространством состояний $S = \{0, \dots, m\}$ и $p_{x,x} = x/m = 1 - p_{x,x+1}$ (конечно, $p_{m,m} = 1$, поэтому $p_{m,m+1}$ просто не определено). Каждый синглтон пространства состояний является сообщающимся классом, причём $\{m\}$ — единственный замкнутый.
b. Это момент остановки. Фактически, это момент первого достижения $\{m\}$.
c. Мы имеем $\mathbb{P}_x(\tau_m = t) = \mathbb{P}_x(X_{t-1} = m-1, X_t = m) = p^{(t-1)}_{x,m-1} p_{m-1,m}$. $p_{m-1,m} = 1/m$, поэтому нам просто нужно вычислить степень $p^{(t-1)}_{0,m-1}$. Матрица P имеет собственные значения $\{0, 1/m, 2/m, \dots, 1-1/m, 1\}$. Все они вещественны и просты, и назовём их $\lambda_x = x/m$. Тот факт, что $\lambda_x = x/m$, соответствует следующему замечанию[1]: как только Анна использовала ровно x велосипедов (например, если цепь начинается в состоянии x), она не будет использовать новый велосипед в течение ещё t дней с вероятностью λ_x^t. Соответствующие левые собственные векторы $f^x P = \lambda_x f^x$ и правые собственные векторы $Pe^x = \lambda_x e^x$ равны

$$(e^x)_y = \binom{m-y}{x-y} \mathbf{1}_{y\le x}$$
$$(f^x)_y = (-1)^y \binom{m-x}{y-x} \mathbf{1}_{y\ge x}$$

Таким образом, из линейной алгебры

$$(p^{(t)})_{x,y} = \sum_{z=0}^{m} \frac{(e^z)_x\, \lambda_z^t\, (f^z)_y}{e^z \cdot f^z} = \sum_{z=x}^{y} (-1)^{y-z} \binom{m-x}{z-x, y-z, m-y} \left(\frac{z}{m}\right)^t$$

В частности

$$\mathbb{P}(\tau_m = t) = p^{(t-1)}_{0,m}/m = \sum_{z=0}^{m-1} (-1)^{m-z+1} \binom{m-1}{z} \left(\frac{z}{m}\right)^{t-1} \qquad (2)$$

Альтернативный метод использует принцип включения-исключения. Пусть A_i — событие, состоящее в том, что велосипед i *не* был использован к дню t. Сначала вычислим

$$\mathbb{P}(X_t = m) = 1 - \mathbb{P}\left(\cup_{i=1}^{m} A_i\right)$$

По принципу включения-исключения:

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right) = \sum_i \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \cdots + (-1)^{m+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_m)$$

Вероятность не выбрать определённый набор из k велосипедов за t дней равна: $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = (\frac{m-k}{m})^t$ Существует $\binom{m}{k}$ способов выбрать, какие k велосипедов исключить. Подставляя это в формулу включения-исключения, получаем

$$\mathbb{P}(\tau_m = t) = \mathbb{P}(X_t = m) - \mathbb{P}(X_{t-1} = m) = \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} \left((\tfrac{m-k}{m})^t - (\tfrac{m-k}{m})^{t-1} \right)$$

что даёт тот же ответ, что и в Уравнение 2.

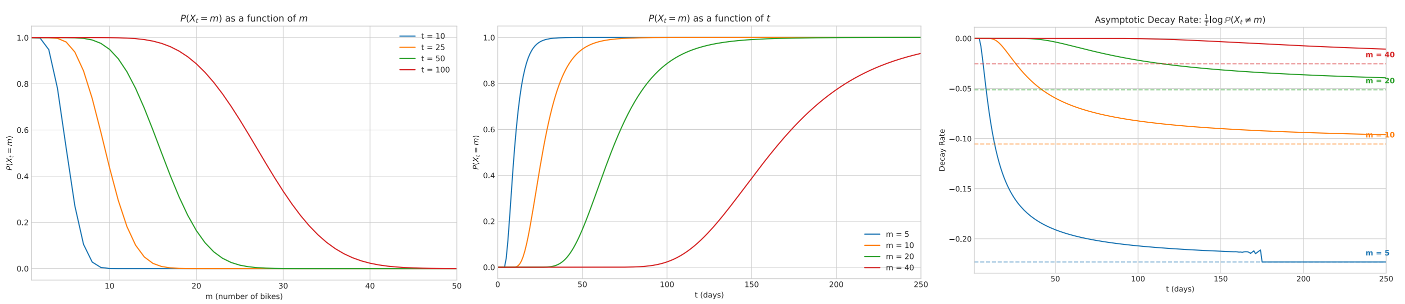

Рисунок 2: На графиках показана $\mathbb{P}(X_t = m)$ как функция от m при фиксированном t и, что более интересно, как функция от t при фиксированном m. При больших t, $\mathbb{P}(X_t \neq m) \simeq (\lambda_{m-1})^t \simeq e^{-t/m}$. Мы видим этот факт, вычисляя $\frac{1}{t}\log \mathbb{P}(X_t \neq m)$. При больших t это выражение сходится к своей асимптоте $\log(1 - 1/m)$. При малых m сходимость к 0 быстрее: когда вероятность становится очень малой, мы наблюдаем проблему машинной ошибки (странное поведение на синем графике), что напоминает о сложной задаче численного вычисления экспонент.

Упражнение 0.3. В теннисном матче два игрока, А и Б, играют на очки. Игрок А выигрывает очко с вероятностью p, а игрок Б — с вероятностью $1 - p$. Игра заканчивается, когда один из игроков выиграл 4 очка в общей сложности и по крайней мере на 2 очка больше, чем соперник.

a. Смоделируйте игру как цепь Маркова на конечном пространстве состояний и представьте её в виде взвешенного графа.
b. Является ли это неразложимой цепью Маркова? Если нет, определите сообщающиеся классы и замкнутые из них.
c. Какова вероятность того, что игрок А выиграет игру?
d. Какова вероятность того, что игра продлится не более 5 очков?

Теперь предположим, что у игрока А есть психологическое преимущество, и если очко решает исход игры, он выигрывает его с вероятностью $q > p$.

[1]Можно проверить, что если $p_{x,x}^{(t)} = \lambda^t$ для некоторого $x \in S$, $\lambda \in [0, 1]$ и *всех* $t \in \mathbb{N}$, то λ является собственным значением P.

e. Какова теперь вероятность того, что игрок А выиграет игру?
f. (Необязательно) Проведите компьютерное моделирование для численной оценки результатов пунктов a. и b. для фиксированного значения p. Сравните результаты с теоретическими.

Решение

a. Хотя в принципе счёт очков может расти бесконечно, мы можем свести это к цепи с конечным числом состояний, отслеживая только преимущество игроков после того, как оба набрали по 3 очка. Именно так официально ведётся счёт в теннисных геймах, и это можно легко представить следующим ориентированным графом.

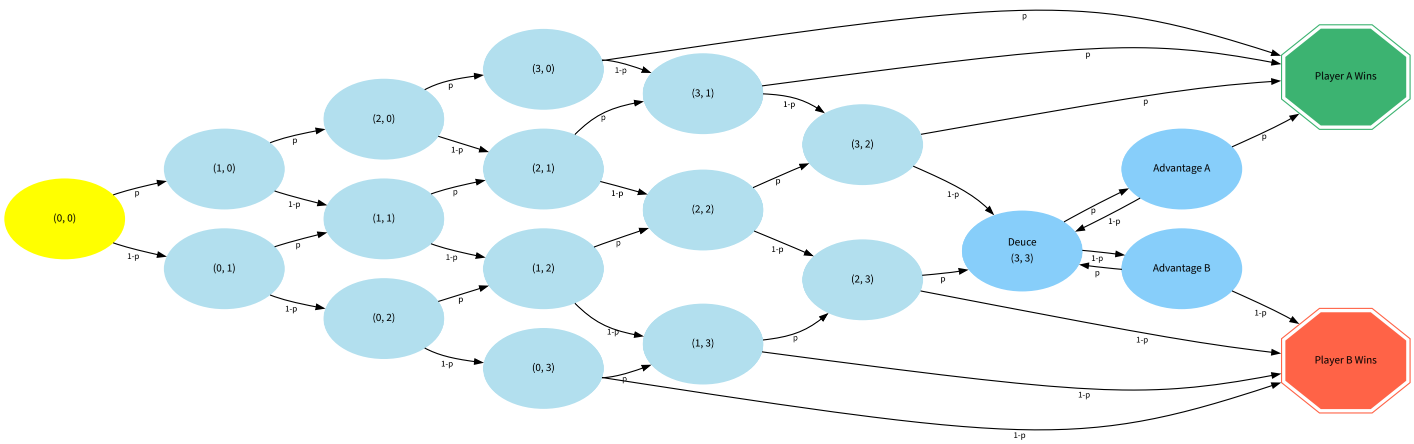

Рисунок 3

b. Каждое состояние, в котором хотя бы у одного из двух игроков не более 2 очков, является сообщающимся классом, состоящим из одного элемента (синглтоном). Действительно, такой счёт никогда не может быть достигнут снова. Каждое из двух состояний, в которых один из игроков выигрывает, является замкнутым сообщающимся классом. Наконец, три состояния: *Ровно*, *Преимущество А* и *Преимущество Б* — вместе образуют сообщающийся класс (однако не замкнутый).

c. Игра длится не более 5 очков, если она заканчивается ровно за 4 или 5 очков.

- Игра заканчивается за 4 очка с вероятностью $p^4 + (1-p)^4$ (вероятность траектории, где А всегда выигрывает, плюс та, где Б всегда выигрывает).
- Игра заканчивается ровно за 5 очков при следующих траекториях: А выигрывает 3 из первых 4 очков, а затем выигрывает последнее; или Б выигрывает 3 из первых 4 очков, а затем выигрывает последнее. Вероятность в этом случае равна $\binom{4}{1}p^4(1-p) + \binom{4}{1}p(1-p)^4$.

Искомая вероятность тогда равна $p^4 + (1-p)^4 + 4p^4(1-p) + 4p(1-p)^4$.

d. Пусть a, b — состояния, в которых выигрывают А и Б соответственно, i — начальное состояние со счётом $(0,0)$, а d — состояние *Ровно*. Мы используем обозначения, введённые в лекциях: $h_x(y)$ — это вероятность достижения состояния x при старте из y, а $h_{x,y}(z)$ — вероятность достичь x раньше, чем y, при старте из z. Поскольку $\mathbb{P}(\tau_{\{a,b\}} < \infty) = 1$, в принципе, мы можем просто определить $h_a(x)$ как вероятность выигрыша А при счёте x, решить линейную задачу для вероятностей достижения и найти требуемое $h_a(i)$.

Однако пространство состояний здесь довольно велико, поэтому давайте вычислим эту вероятность менее систематически. Событие, состоящее в том, что игрок А выигрывает игру, является объединением всех возможных траекторий, заканчивающихся в a. Существует два типа траекторий: те, в которых Б никогда не набирает 3 очка (так что состояние *Ровно* не достигается), и те, в которых достигается состояние *Ровно*.

- Вероятность выиграть, ни разу не достигнув состояния *Ровно*, равна сумме вероятностей всех таких траекторий: $h_{a,d}(i) = p^4 + \binom{4}{1}p^4(1-p) + \binom{5}{2}p^4(1-p)^2$ (существует одна траектория, где А выигрывает все очки, $\binom{4}{1}$ — где Б выигрывает 1 очко, а А выигрывает 4 очка, включая последнее, $\binom{5}{2}$ — где Б выигрывает 2 очка, а А выигрывает 4 очка, включая последнее).
- Вероятность достижения состояния *Ровно* равна $h_d(i) = \binom{6}{3}p^3(1-p)^3$.
- Как только мы оказываемся в состоянии *Ровно*, мы можем забыть об остальном и решать гармоническую задачу с этого момента: если А выигрывает следующие два очка (вероятность p^2), А выигрывает игру. Если Б выигрывает следующие два очка (вероятность $(1-p)^2$), Б выигрывает игру. Если каждый из них выигрывает по одному очку (вероятность $2p(1-p)$), счёт возвращается к *Ровно*. Мы можем записать рекурсивное уравнение для $h_a(d)$:

$$h_a(d) = p^2 + 2p(1-p)h_a(d)$$

  или $h_a(d) = \frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$.
- Вероятность достичь состояния *Ровно* и затем выиграть равна $h_d(i)h_a(d)$ (по сильному свойству Маркова).

Следовательно, вероятность выигрыша А равна

$$h_a(i) = h_{a,d}(i) + h_a(d)h_d(i) = p^4(1 + 4(1-p) + 10(1-p)^2) + 20p^3(1-p)^3\frac{p^2}{p^2+(1-p)^2}$$

e. Здесь работает тот же подход, что и раньше, но, надеюсь, это решение нельзя найти в интернете! Давайте вычислим вероятность выигрыша А при этом новом условии.

- Вероятность выиграть, ни разу не достигнув состояния *Ровно*, равна $h_{a,d}(i) = [p^3]q + [p^3(1-q) + \binom{3}{1}p^3(1-p)]q + [p^3(1-q)^2 + \binom{3}{1}p^3(1-p)(1-q) + \binom{4}{2}p^3(1-p)^2]q$, где члены в квадратных скобках, умноженные на q, соответствуют вероятностям выигрыша за 4, 5 и 6 очков соответственно.
- Вероятность достижения состояния *Ровно* можно вычислить как

$$h_d(i) = (1-q)h_{(3,2)}(i) + qh_{(2,3)} = (1-q)\left[p^3(1-q)^2 + \binom{3}{1}p^3(1-p)(1-q) + \binom{4}{2}p^3(1-p)^2\right] + q\left[(1-p)^3q^2 + \binom{3}{1}(1-p)^3pq + \binom{4}{2}(1-p)^3p^2\right]$$

- Вероятность выигрыша из состояния *Ровно* удовлетворяет уравнению

$$h_a(d) = p(q + (1-q)h_a(d)) + (1-p)(qh_a(d))$$

  или $h_a(d) = (pq)/(1-p-q+2pq)$.

В конечном счёте, вероятность выигрыша равна

$$h_a(i) = h_{a,d}(i) + h_a(d)\cdot h_d(i) = \frac{pq(-9p^4(q-1)-p^3(q^2-24q+23)+p^2(2q^3-2q^2-15q+15)-3p(q-1)q^2+q^3)}{p(2q-1)-q+1}$$

Эту задачу можно проще решить, просто используя решатель линейных систем (для гармонического уравнения), что даёт тот же ответ

```python
import sympy as sp

# Declare sympy symbols
p, q, h_d, h_a, h_b = sp.symbols('p q h_d h_a h_b')

# Solve the deuce sub-problem in-line to get the win probability from deuce.
h_deuce = sp.solve([
 sp.Eq(h_d, p*h_a + (1-p)*h_b),
 sp.Eq(h_a, q + (1-q)*h_d),
 sp.Eq(h_b, q*h_d)
], (h_d, h_a, h_b))[h_d]

# Define a recursive solver for the probability from any score (a,b).
def prob(a, b):
 if a >= 4 and a >= b + 2: return 1
 if b >= 4 and b >= a + 2: return 0
 if a == 3 and b == 3: return h_deuce

 # Use 'q' on game points, otherwise 'p'.
 pt_prob = q if (a == 3 and b < 3) or (b == 3 and a < 3) else p
 return pt_prob * prob(a + 1, b) + (1 - pt_prob) * prob(a, b + 1)

# Print the result from the initial score (0,0)
result = sp.simplify(prob(0, 0))

print(f"""--- Probability of Player A Winning a Game ---

[ LaTeX format ]
{sp.latex(result)}

[ Mathematica format ]
{sp.mathematica_code(result)}

[ Plain text format ]
{result}""")
```

```
--- Probability of Player A Winning a Game ---

[ LaTeX format ]
\frac{p q \left(- 9 p^{4} q + 9 p^{4} - p^{3} q^{2} + 24 p^{3} q - 23 p^{3} + 2 p^{2} q^{3} -

[ Mathematica format ]
p*q*(-9*p^4*q + 9*p^4 - p^3*q^2 + 24*p^3*q - 23*p^3 + 2*p^2*q^3 - 2*p^2*q^2 - 15*p^2*q + 15

[ Plain text format ]
p*q*(-9*p**4*q + 9*p**4 - p**3*q**2 + 24*p**3*q - 23*p**3 + 2*p**2*q**3 - 2*p**2*q**2 - 15
```

f. Вот сравнение. Не стесняйтесь изменять размер окна и редактировать код.

Упражнение 0.4. Мы хотим дать аналитическую характеристику переходных вероятностей $q_{x,y}$ следа рекуррентной цепи Маркова. Мы доказали, что след **X** на A имеет переходные вероятности

$$q_{x,y} = \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y)$$

Определим оператор $P^{(A)}$ с элементами

$$p_{x,y}^{(A)} = \begin{cases} p_{x,y} & \text{if } y \in A \\ 0 & \text{if } y \notin A \end{cases}$$

Докажите, что для каждого фиксированного $y \in A$, $q_{x,y}$ является минимальным решением задачи для неизвестной $h \geq 0$

$$((I - P^{(A^c)})h)(x) = p_{x,y}, \qquad x \in S \tag{3}$$

означает $q_{x,y} - \sum_{z \notin A} p_{x,z} q_{z,y} = p_{x,y}$ для всех $x \in A$.

Решение

Зафиксируем $y \in A$ и обозначим $h(x) \equiv q_{x,y} = \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y)$ для $x \in S$. Обусловливая по первому шагу:

$$h(x) = \sum_{z \in S} p_{x,z} \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y | X_1 = z) = \sum_{z \in A} p_{x,z} \mathbf{1}_{y=z} + \sum_{z \notin A} p_{x,z} h(z) = p_{x,y} + \sum_{z \notin A} p_{x,z} h(z)$$

Чтобы доказать минимальность, пусть теперь $g \geq 0$ — любое неотрицательное решение системы Уравнение 3 для фиксированного $y \in A$ (которое мы опускаем в обозначениях). Определим $h^{(n)}(x) := \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y, \tau_A^+ \leq n)$. Тогда $h^{(n)}(x) \leq q_{x,y}$, и по свойству непрерывности вероятности на монотонных последовательностях, $h^{(n)}(x) \uparrow h(x)$. Следовательно, достаточно проверить, что $g \geq h^{(n)}$ для всех $n \geq 0$. Теперь докажем по индукции.

- Тривиально, $g \geq h^{(0)} \equiv 0$.
- $h^{(n)}$ удовлетворяет (рассуждая как для $q_{\cdot,y}$ выше)

  $$h^{(n+1)}(x) = p_{x,y} + \sum_{z \notin A} p_{x,z} h^{(n)}(z)$$

  Следовательно, по индукционному предположению

  $$g(x) = p_{x,y} + (P^{(A^c)} g)(x) \geq p_{x,y} + (P^{(A^c)} h^{(n)})(x) = h^{(n+1)}(x)$$