

## Листок 2

Что разрешено делать:

- Обсуждать задачи с одноклассниками.
- Обращаться за помощью к преподавателю. (некоторые моменты сложны, вполне нормально не знать, как действовать).
- Использовать компьютер для линейных операций (например, умножение матриц, умножение матрицы на вектор и т.д.), при условии, что вы знаете, как делать это вручную.

Что вы обязаны делать:

- Записывать решения самостоятельно.

Что запрещено делать:

- Копировать записанные решения у одноклассника.
- Использовать ИИ для получения решений.

### Задачи

**Упражнение 0.1.** Пусть  $P$  — марковский оператор неприводимой цепи Маркова на конечном пространстве состояний  $S$ . Пусть  $m$  — её инвариантная мера, а  $P^\dagger$  — сопряжённый оператор к  $P$  в  $L^2(m)$ .

- Проверьте, что если  $P, Q$  — марковские операторы, то  $PQ$  и  $\alpha P + (1 - \alpha)Q$  также являются марковскими операторами. В частности,  $PP^\dagger$  и  $P^2$  — марковские операторы.
- Найдите инвариантную меру для  $PP^\dagger$  и  $P^2$ . Приведите пример, где  $P$  неприводима, но  $PP^\dagger$  и  $P^2$  не являются таковыми.
- Приведите пример, где  $P$  неприводима, но  $P^2$  и  $PP^\dagger$  не являются неприводимыми.
- Докажите, что если  $P$  неприводима и апериодична, то  $P^2$  неприводима и апериодична.
- Докажите,  $PP^\dagger$  апериодична и каждый класс общения закрыт.
- Предположим, что  $P$  неприводима и апериодична. Пусть  $X_t$  и  $Y_t$  — цепи Маркова с марковскими операторами  $P^2$  и  $PP^\dagger$  соответственно; докажите, что  $X_t$  сходится к своему «равновесию» быстрее, чем  $Y_t$ , в следующем смысле. Пусть  $\mu_t^x$  (соответственно  $\nu_t^x$ ) — закон распределения  $X_t$  при условии  $X_0 = x$  (соответственно  $Y_t$  при  $Y_0 = x$ ). Докажите, что

$$\sup_x \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\mu_t^x - m\|_{TV} \leq \sup_x \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|\nu_t^x - m\|_{TV}$$

### Решение

- Пусть  $R = PQ$ , тогда  $r_{x,z} = \sum_y p_{x,y} q_{y,z}$ . Меняя порядок суммирования, имеем  $r_{x,z} \geq 0$  и  $\sum_z r_{x,z} = \sum_y p_{x,y} \sum_z q_{y,z} = \sum_y p_{x,y} = 1$ . Что касается выпуклой комбинации, доказательство следует непосредственно из линейности.

- b. Инвариантной мерой всех этих операторов является  $m$ . В общем случае, если  $P, Q$  имеют одну и ту же инвариантную меру, то  $m((PQ)f) = m(P(Qf)) = m(Qf) = m(f)$ . Таким образом,  $m$  инвариантна для  $PQ$ .
- c. Мы можем взять единственный цикл  $S = \mathbb{Z}_{2k}$  с чётным числом точек,  $P$  соответствует движению по часовой стрелке с вероятностью 1,  $p_{x,x+1} = 1$  (суммы понимаются  $(\text{mod } 2k)$ ). Тогда  $P$  неприводима, так как существует путь, соединяющий любые две точки.  $PP^\dagger$  соответствует выполнению одного шага по часовой стрелке и одного против часовой стрелки, то есть  $PP^\dagger = I$ , блуждание просто не движется.  $P^2$  соответствует выполнению двух шагов по часовой стрелке  $p_{x,x+2}^{(2)} = 1$ . Таким образом, не существует пути, соединяющего точки с разной чётностью.
- d. Для неприводимой апериодической цепи на конечном пространстве состояний существует достаточно большое  $T$ , такое что  $p_{x,y}^{(t)} > 0$  для всех  $t > T$  и  $x, y \in S$ . В частности, то же самое верно, если заменить  $T$  на  $T' = \lceil T/2 \rceil$ , для элементов  $P^2$ .
- e. Обозначим через  $(q_{x,y})$  элементы  $Q = PP^\dagger$ .  $q_{x,z} > 0$  тогда и только тогда, когда существует  $y \in S$ , такое что  $p_{x,y}, p_{z,y} > 0$ . В частности,  $q_{x,z} > 0$  тогда и только тогда, когда  $q_{z,x} > 0$  и  $q_{x,x} > 0$  для всех  $x \in S$  (так как каждая точка  $x$  имеет по крайней мере одного приемника  $y_x$ , такого что  $p_{x,y_x} > 0$ ). В частности, каждый класс сообщающихся состояний  $Q$  замкнут.
- f. Согласно **теореме об экспоненциальной сходимости**, нам нужно проверить, что  $|\lambda_1(P^2)| \leq |\lambda_1(PP^\dagger)|$ , где  $\lambda_1(Q)$  — наибольшее (по модулю) собственное число неприводимого марковского оператора  $Q$ , за исключением  $\lambda_0 = 1$ ; или, что эквивалентно, наибольшее собственное число  $Q$ , ограниченного на функции  $f$  с  $m(f) = 0$ , где  $m$  — инвариантная мера  $Q$ .

Для  $P^2$  имеем  $\lambda_1(P^2) = \lambda_1(P)^2 = \overline{\lambda_1(P^\dagger)^2}$ . Возьмём  $f_1$  — ассоциированную (комплексную) собственную функцию (с  $m(f_1) = 0$ ) оператора  $P^\dagger$ , так что  $P^\dagger f_1 = \overline{\lambda_1(P^\dagger)} f_1$ . Тогда, так как  $PP^\dagger$  симметричен,  $\lambda_1(PP^\dagger) > 0$ , и, обозначая через  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  эрмитово скалярное произведение в  $L^2(m)$ , имеем

$$|\lambda_1(PP^\dagger)| = \sup_{f: m(f)=0} \frac{\langle f, PP^\dagger f \rangle}{m(|f|^2)} = \sup_{f: m(f)=0} \frac{\langle P^\dagger f, P^\dagger f \rangle}{m(|f|^2)} \geq \frac{\langle P^\dagger f_1, P^\dagger f_1 \rangle}{m(|f_1|^2)} = \overline{\lambda_1(P^\dagger)} \lambda_1(P^\dagger) = |\lambda_1(P^2)|$$

**Упражнение 0.2.** Рассмотрим неприводимую цепь Маркова на конечном пространстве состояний  $S$  с вероятностями перехода  $p_{x,y}^0$ . Пусть  $c(x,y) \in \mathbb{R}$  определена для всех рёбер  $(x,y)$ , таких что  $p_{x,y} > 0$ . Зафиксируем  $\beta > 0$  и определим наклонённые вероятности перехода

$$p_{x,y}^\beta := \frac{e^{-\beta c(x,y)}}{Z_x^\beta} p_{x,y}^0$$

- a. Определите значение  $Z_x^\beta$  и проверьте, что цепь Маркова с вероятностями перехода  $p_{x,y}^\beta$  остаётся неприводимой.
- b. Объясните, почему мы можем предполагать, что  $\min_{y: p_{x,y}^0 > 0} c(x,y) = 0$ , и проверьте, что в этом случае

$$\inf_y p_{x,y}^0 \leq Z_x^\beta \leq 1$$

- c. Пусть  $m^\beta$  — инвариантная вероятностная мера, ассоциированная с вероятностями перехода  $p^\beta$ . Охарактеризуйте предел  $\lim_{\beta \rightarrow \infty} m^\beta$ . Подсказка: Для простоты предположите, что значения  $\sum_{e \in \theta} c(e)$  различны для различных  $\theta \in \Theta$ , где  $\Theta$  — пространство входящих остовных арборесценций с корнем.
- d. Дайте явный ответ в случае  $c(x,y) = (V(y) - V(x))^+$ , где  $V: S \rightarrow \mathbb{R}$  — заданная инъективная функция, а для  $a \in \mathbb{R}$ ,  $a^+ = \max(a, 0)$ . Подсказка: Для простоты предположите, что  $p_{x,y}^0 > 0$  всякий раз, когда  $p_{y,x}^0 > 0$ .

💡 Решение

a. Поскольку  $p_{x,\cdot}^\beta$  является вероятностью, имеем

$$Z_x^\beta := \sum_y e^{-\beta c(x,y)} p_{x,y}^0$$

Цепь Маркова остаётся неприводимой, так как  $p_{x,y}^\beta > 0$  тогда и только тогда, когда  $p_{x,y}^0 > 0$ .

b. Если мы заменим  $c(x, y)$  на  $c(x, y) - a(x)$ , то  $p_{x,y}^\beta$  не изменится, независимо от  $a(x)$ . Следовательно, для упрощения вычислений мы можем взять  $a(x) = \min_y c(x, y)$ . Другими словами, мы просто предполагаем, что  $\min_y c(x, y) = 0$ . В частности,

$$\inf_y p_{x,y}^0 \leq \max_y e^{-\beta c(x,y)} p_{x,y}^0 \leq Z_x^\beta \leq \sum_y e^{-0} p_{x,y}^0 = 1$$

c. Мы знаем, что

$$m_x^\beta = c^\beta \sum_{\theta \in \Theta_x} w^\beta(\theta), \quad w^\beta(\theta) := \prod_{e \in \theta} p_e^\beta$$

где  $c^\beta > 0$  — подходящая нормировочная константа (которая представляет собой ту же сумму по  $\theta \in \Theta$ ). Используя определение  $p_{x,y}^\beta$ , имеем

$$m_x^\beta = c^\beta \sum_{\theta \in \Theta_x} \frac{e^{-\beta \sum_{e \in \theta} c(e)}}{\prod_{y \neq x} Z_y^\beta} w^0(\theta)$$

где произведение в знаменателе пробегает все  $y \in S$ , из которых есть исходящее ребро, а именно все  $y \in S$ , кроме корня  $x$ . Для  $Z^\beta := \prod_x Z_x^\beta$  и  $c(\theta) := \sum_{e \in \theta} c(e)$ :

$$m_x^\beta = \frac{c^\beta}{Z^\beta} \sum_{\theta \in \Theta_x} Z_x^\beta e^{-\beta c(\theta)} w^0(\theta)$$

Мы знаем, что для неприводимой цепи  $\Theta_x$  непусто для любого  $x \in S$ . И просто оценивая сумму наибольшим слагаемым (как выше), имеем

$$Z_x^\beta \max_{\theta \in \Theta_x} e^{-\beta c(\theta)} w^0(\theta) \leq m_x^\beta \frac{Z^\beta}{c^\beta} \leq |\Theta_x| Z_x^\beta \max_{\theta \in \Theta_x} e^{-\beta c(\theta)} w^0(\theta)$$

и, таким образом, используя оценку из пункта b,

$$\min_y p_{x,y}^0 \min_{\theta \in \Theta_x} w^0(\theta) e^{-\beta \min_{\theta \in \Theta_x} c(\theta)} \leq m_x^\beta \frac{Z^\beta}{c^\beta} \leq |\Theta_x| \max_{\theta \in \Theta_x} w^0(\theta) e^{-\beta \min_{\theta \in \Theta_x} c(\theta)}$$

Это означает, что  $m_x^\beta$  концентрируется (экспоненциально быстро при  $\beta \rightarrow \infty$ ) в точке  $x$ , которая несёт **минимальную остовную арборесценцию** для стоимости  $c(x, y)$ , то есть в корне дерева  $\theta$ , минимизирующего  $c(\theta)$ . Действительно, для таких  $x$  и  $y \neq x$ ,  $m_y^\beta / m_x^\beta \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow \infty$ .

d. Мы хотим показать, что в случае  $c(x, y) = (V(y) - V(x))^+$  корнем минимальной остовной арборесценции является минимизатор  $V(\cdot)$  (который единственен, так как мы предположили, что  $V$  инъективна). В этом случае можно привести комбинаторное доказательство, используя  $c(x, y) - c(y, x) = V(y) - V(x)$ . Вместо этого приведём доказательство с использованием *цепей*

Маркова, эффективно используя тот факт, что минимальная остовная арборесценция не зависит от значений  $p_{x,y}^0$ , а только от рёбер, на которых эта вероятность отлична от нуля.

Сначала предположим, что инвариантная мера  $m^0$  цепи  $(p_{x,y}^0)$  обратима, тогда  $m_x^\beta := c^\beta e^{-\beta V(x)} Z_x^\beta m_x^0$  обратима для  $(p_{x,y}^\beta)$ , так как

$$m_x^\beta p_{x,y}^\beta = Z_x^\beta e^{-\beta V(x)} \frac{e^{-\beta(V(y)-V(x))^+}}{Z_x^\beta} m_x^0 p_{x,y}^0 = e^{-\beta \max(V(x), V(y))} m_x^0 p_{x,y}^0 = e^{-\beta \max(V(x), V(y))} m_y^0 p_{y,x}^0 = m_y^\beta p_{y,x}^\beta$$

Таким образом, поскольку  $V(x) + (V(y) - V(x))^+ = \max(V(y), V(x))$ , рассуждая как выше,

$$m_x^\beta = c^\beta m_x^0 \sum_y e^{-\beta \max(V(y), V(x))} p_{x,y}^0$$

концентрируется в точках  $x$ , минимизирующих

$$x \mapsto \min_{y: p_{x,y}^0 > 0} \max(V(y), V(x))$$

В частности, если  $p_{x,x}^0 > 0$ , мера концентрируется на минимизаторе  $V(x)$ .

Если  $m^0$  не обратима, мы можем заменить  $p_{x,y}^0$  на  $q_{x,y}^0 := p_{x,y}^0 + p_{y,x}^0 m_y^0 / m_x^0$  (для которой  $m^0$  обратима) без изменения минимальной остовной арборесценции (которая зависит только от  $c(x, y)$ ), поэтому ответ не меняется даже когда  $m^0$  не обратима.

**Упражнение 0.3.** Рассмотрим неприводимую цепь Маркова на конечном пространстве состояний  $S$  с вероятностями перехода  $(p_{x,y})$ . Напомним, что мы рассматриваем  $S$  как граф, где рёбрами являются  $e = (x, y)$ , такие что  $p_{x,y} > 0$ . Весом **входящего остовного леса с корнями**  $F$  называется произведение

$$w(F) := \prod_{e \in F} p_e$$

Для непустого  $A \subset S$ , пусть  $\mathfrak{F}_A$  — множество входящих остовных лесов с корнями, множеством корней которых является в точности  $A$ . Для  $x \in S$  и  $r \in A$ , определим  $\mathfrak{F}_A(x \rightarrow r)$  как множество лесов  $F \in \mathfrak{F}_A$ , таких что  $x$  находится во входящей арборесценции с корнем в  $r$  (другими словами, следуя по единственному пути в  $F$ , выходящему из  $x$ , можно достичь  $r \in A$ ).

Пусть теперь  $r \in A \subset S$ . Так как цепь неприводима и конечна,  $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) = 1$ , и пусть  $h(x) \equiv h_{r,A}(x) := \mathbb{P}_x(X_{\tau_A} = r)$ . Докажите, что

$$h(x) = \frac{\sum_{F \in \mathfrak{F}_A(x \rightarrow r)} w(F)}{\sum_{F \in \mathfrak{F}_A} w(F)} \quad (1)$$

### 💡 Решение

Так как цепь Маркова неприводима и имеет инвариантную меру (поскольку пространство состояний конечно),  $h$  является **единственным** решением задачи для неизвестной  $u$

$$(I - \mathbf{1}_{A^c} P)u = \mathbf{1}_r$$

Пусть  $g(x)$  — правая часть Уравнение 1, покажем, что  $g$  также удовлетворяет этому уравнению, следовательно  $g = h$ .

Очевидно,  $g(x) = \mathbf{1}_r(x)$  для  $x \in A$ , поэтому нам нужно лишь проверить, что  $g(x) = (Pg)(x)$  для  $x \notin A$ .

Знаменатель  $\sum_{F \in \mathfrak{F}_A} w(F)$  сокращается в обеих частях этого уравнения, так что остаётся проверить

$$\sum_{G \in \mathfrak{F}_A(x \rightarrow r)} w(G) \stackrel{?}{=} \sum_y p_{x,y} \sum_{F \in \mathfrak{F}_A(y \rightarrow r)} w(F), \quad x \notin A$$

Так как  $\sum_y p_{x,y} = 1$ , мы можем записать это как

$$\sum_{z \neq x} \sum_{G \in \mathfrak{F}_A(x \rightarrow r)} p_{x,z} w(G) \stackrel{?}{=} \sum_{y \neq x} \sum_{F \in \mathfrak{F}_A(y \rightarrow r)} p_{x,y} w(F), \quad x \notin A$$

Мы можем сопоставить слагаемые в обеих частях, построив биекцию между индексами  $(z, G)$  (при условии  $x \rightarrow r$  в  $G$ ) слева и  $(y, F)$  (при условии  $y \rightarrow r$  в  $F$ ) справа следующим образом.

- Если  $z \rightarrow r$  в  $G$ , то мы берём  $y = z$  и  $G = F$ , другими словами, эти члены присутствуют в обеих частях.
- Если  $z \not\rightarrow r$ , то  $(x, z)$  не содержится в  $G$ . Мы сопоставляем такую пару  $(z, G)$  элементу  $(y, F)$  в правой части, где  $y$  — единственная вершина, такая что  $(x, y) \in G$ ; а  $F$  — это лес, полученный из  $G$  удалением  $(x, y)$  и добавлением  $(x, z)$ .

Это биекция между слагаемыми в левой части и правой части, и очевидно, что  $p_{x,z} w(G) = p_{x,y} w(F)$ .

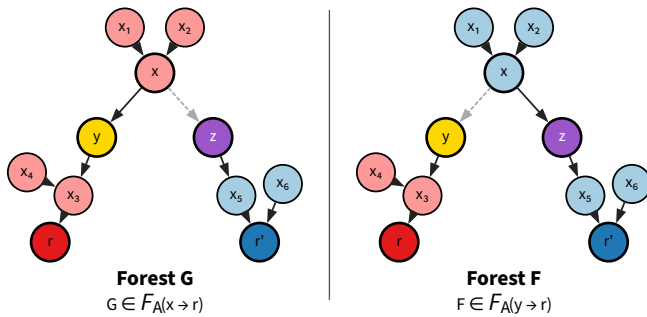


Рисунок 1: Пара  $(z, G)$  с  $G \in \mathfrak{F}_A(x \rightarrow r)$  и  $z \not\rightarrow r$ , биективно отображается в  $(y, F)$  с  $F \in \mathfrak{F}_A(y \rightarrow r)$ , просто меняя местами последователя  $x$ .