Глава 3. Моменты и вероятности достижения

Определения

Определение 0.1 (Момент первого достижения)**.** Пусть $\mathbf{X} = (X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ — однородная во времени цепь Маркова на пространстве состояний S. Для любого подмножества $A \subseteq S$, **момент первого достижения** (или **момент первого прохода**) множества A — это случайная величина $\tau_A : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, определённая как

$$\tau_A := \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t \in A\}$$

где $\inf \emptyset = \infty$. Если $A = \{x\}$ для единственного состояния x, мы часто пишем τ_x вместо $\tau_{\{x\}}$.

Определение 0.2 (Вероятность достижения)**.** Для $A \subset S$ и $x \in S$, **вероятность достижения** A из x определяется как

$$h_A(x) := \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty)$$

Это вероятность того, что цепь Маркова, стартуя из состояния x, когда-либо посетит какое-либо состояние из множества A.

Основные результаты

Теорема 0.1. *Вероятность достижения $h_A(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty)$ удовлетворяет следующей системе уравнений относительно неизвестной h*

$$\begin{cases} h(x) = 1 & \text{если } x \in A \\ ((I-P)h)(x) = 0 & \text{если } x \in A^c \end{cases} \tag{1}$$

Более того, $h_A(x)$ является наименьшим неотрицательным решением *этих уравнений. А именно, если $g \geq 0$ решает систему Уравнение 1, то $g \geq h_A$.*

Наконец, h_A — это единственное решение $g \geq 0$ системы Уравнение 1, такое что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_x[g(X_n)\mathbf{1}_{\tau_A > n}] = 0$$

Доказательство. Мы будем действовать пошагово.

1. (Граничное условие) Если $x \in A$, то $\tau_A = 0$ $\mathbb{P}_x$-п.н., и следовательно $h_A(x) = 1$.

2. (Гармоничность) Так как $x \in A^c$, имеем $\{\tau_A < \infty\} = \{\exists t \geq 0 : X_t \in A\} = \{\exists t \geq 1 : X_t \in A\}$ с $\mathbb{P}_x$-вероятностью 1. Таким образом, обуславливая по первому шагу цепи и используя Марковское свойство для функции $\mathbf{1}_{\{\tau_A<\infty\}}$

$$h_A(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) = \sum_{y \in S} \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty \mid X_1 = y)\mathbb{P}_x(X_1 = y)$$
$$= \sum_{y \in S} \mathbb{P}_y(\tau_A < \infty) p_{x,y} = \sum_{y \in S} p_{x,y} h_A(y)$$

3. (Минимальность) Пусть $g\colon S \to [0,\infty)$ — любая неотрицательная функция, удовлетворяющая Уравнение 1. Докажем по индукции, что

$$g(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A \leq n) + \mathbb{E}_x[g(X_n)\mathbf{1}_{\tau_A > n}] \tag{2}$$

- Возьмём $n = 1$. Если $x \in A$, то утверждение сводится к $1 = 1 + 0$. Если $x \notin A$, то из Уравнение 1

$$g(x) = \mathbb{E}_x[g(X_1)] = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_A(X_1)] + \mathbb{E}_x[g(X_1)\mathbf{1}_{A^c}(X_1)] = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{A^c}(X_0)\mathbf{1}_A(X_1)] + \mathbb{E}_x[g(X_1)\mathbf{1}_{A^c}(X_0)\mathbf{1}_{A^c}(X_1)]$$

  что эквивалентно утверждению по определению τ_A.
- Предположим, что утверждение верно для данного n. Поскольку $\{\tau_A > n\} \subset \{X_n \notin A\}$, $g(X_n) = \mathbb{E}_{X_n}[g(X_1)]$, и рассуждая так же, как в случае $n = 1$

$$\mathbb{E}_x[g(X_n)\mathbf{1}_{\tau_A>n}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}_{X_n}[g(X_1)]\mathbf{1}_{\tau_A>n}] = \mathbb{E}_x[g(X_{n+1})\mathbf{1}_{\tau_A>n}]$$
$$= \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{X_{n+1}\in A}\mathbf{1}_{\tau_A>n}] + \mathbb{E}_x[g(X_{n+1})\mathbf{1}_{X_{n+1}\notin A}\mathbf{1}_{\tau_A>n}] = \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\tau_A=n+1}] + \mathbb{E}_x[g(X_{n+1})\mathbf{1}_{\tau_A>n+1}]$$

  Из индуктивного предположения и последнего равенства

$$g(x) = \mathbb{P}_x(\tau_A \leq n) + \mathbb{E}_x[\mathbf{1}_{\tau_A=n+1}] + \mathbb{E}_x[g(X_{n+1})\mathbf{1}_{\tau_A>n+1}] = \mathbb{P}_x(\tau_A \leq n+1) + \mathbb{E}_x[g(X_{n+1})\mathbf{1}_{\tau_A>n+1}]$$

  Уравнение 2, таким образом, установлено. По теореме о монотонной сходимости, $\lim_n \mathbb{P}_x(\tau_A \leq n) = \mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) = h_A(x)$. Следовательно

$$g(x) = h_A(x) + \lim_n \mathbb{E}_x[g(X_n)\mathbf{1}_{\tau_A>n}] \geq h_A(x)$$

4. (Единственность) Из последнего уравнения мы видим, что предел в этом уравнении обращается в ноль тогда и только тогда, когда $g = h_A$.

□

Примеры

Пример 0.1.

На этом графе стрелки обозначают строго положительные вероятности перехода. Рассмотрим $h_b(x)$ — вероятность достижения b при старте из x. На $\{a,b,c\}$ функция $h_b(x)$ однозначно определяется линейной системой Уравнение 1. С другой стороны, на $\{d,e,f,g\}$ (которое не связано с b), $h_b(x) = 0$; однако $h(x) = c$ для $x \in \{d,e,f,g\}$ решает гармоническое уравнение Уравнение 1 для любой константы c. Мы действительно видим, что h_b является наименьшим неотрицательным решением системы Уравнение 1.

Упражнение 0.1. Пусть $A, B \subset S$, причём $A \cap B = \emptyset$. Найдите уравнение, аналогичное Уравнение 1, которому удовлетворяет

$$h_{A,B}(x) := \mathbb{P}_x(\tau_A < \tau_B, \tau_{A\cup B} < \infty)$$

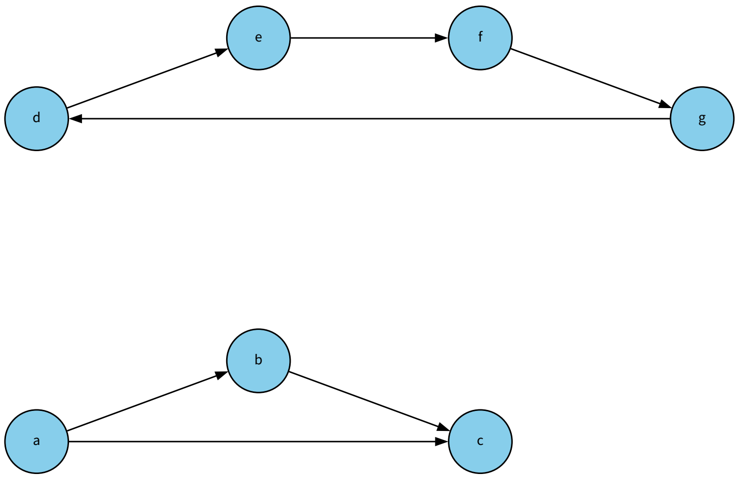

Рисунок 1

используя два разных метода

- Обуславливание по первому шагу, как в доказательстве Теорема 0.1.
- Рассмотрение модифицированной цепи Маркова с вероятностями перехода

$$q_{x,y} := \begin{cases} p_{x,y} & \text{если } x \notin B \\ \mathbf{1}_x(y) & \text{если } x \in B \end{cases}$$

Упражнение 0.2. Мы хотим дать аналитическую характеризацию вероятностей перехода $q_{x,y}$ следа возвратной цепи Маркова. Мы доказали, что след $\mathbf{X}$ на A имеет вероятности перехода, для $x, y \in A$

$$q_{x,y} = \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y)$$

Определим оператор $P^{(A^c)}$ с элементами

$$p_{x,y}^{(A^c)} = \begin{cases} p_{x,y} & \text{если } y \in A^c \\ 0 & \text{если } y \in A \end{cases}$$

Докажите, что для каждого фиксированного $y \in A$, $q_{x,y}$ является наименьшим решением задачи относительно неизвестной $h \geq 0$

$$((I - P^{(A^c)})h)(x) = p_{x,y}, \qquad x \in S \tag{3}$$

то есть $q_{x,y} - \sum_{z \in A^c} p_{x,z} q_{z,y} = p_{x,y}$ для всех $x \in S$.

Решение

Зафиксируем $y \in A$, и обозначим $h(x) \equiv q_{x,y} = \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y)$ для $x \in S$. Обуславливая по первому шагу:

$$h(x) = \sum_{z \in S} p_{x,z} \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y | X_1 = z) = \sum_{z \in A} p_{x,z} \mathbf{1}_{y=z} + \sum_{z \in A^c} p_{x,z} h(z) = p_{x,y} + \sum_{z \in A^c} p_{x,z} h(z)$$

Чтобы доказать минимальность, пусть теперь $g \geq 0$ — любое неотрицательное решение системы Уравнение 3 для фиксированного $y \in A$ (который мы опустим в обозначениях). Определим $h^{(n)}(x) := \mathbb{P}_x(X_{\tau_A^+} = y, \tau_A^+ \leq n)$. Тогда $h^{(n)}(x) \leq q_{x,y}$, и в силу непрерывности вероятностей на монотонных последовательностях, $h^{(n)}(x) \uparrow h(x)$. Следовательно, достаточно проверить, что $g \geq h^{(n)}$ для всех $n \geq 0$. Теперь перейдём к индукции.

- Тривиально $g \geq h^{(0)} \equiv 0$.
- $h^{(n)}$ удовлетворяет (рассуждая так же, как для $q_{\cdot,y}$ выше)

$$h^{(n+1)}(x) = p_{x,y} + \sum_{z \in A^c} p_{x,z} h^{(n)}(z)$$

  Следовательно, по индуктивному предположению

$$g(x) = p_{x,y} + (P^{(A^c)} g)(x) \geq p_{x,y} + (P^{(A^c)} h^{(n)})(x) = h^{(n+1)}(x)$$

Упражнение 0.3 (Разорение игрока). Человек идёт в казино с начальным капиталом x долларов. В каждой игре он выигрывает доллар с вероятностью p и проигрывает доллар с вероятностью $1 - p$. Его стратегия — не уходить, пока капитал не составит N долларов, или пока он не разорится. Найдите вероятность того, что человек разорится в этой игре.

Упражнение 0.4 (Рождение и гибель). Мы наблюдаем за популяцией бактерий и отмечаем каждый раз, когда одна из них размножается (общая численность популяции увеличивается на 1) или погибает (общая численность популяции уменьшается на 1). Вероятность увеличения/уменьшения популяции зависит от размера популяции. Скажем, если популяция в данный момент составляет $n \geq 1$, вероятность того, что размножение произойдёт раньше гибели, равна r_n (а гибель произойдёт раньше размножения с вероятностью $1-r_n$). Найдите вероятность того, что бактерии вымрут, как функцию от последовательности $(r_n)_{n\geq 1}$.

Упражнение 0.5. Вы идёте по пустыне без воды, но с 2000 долларов. Вы находите волшебную лампу, и как только вы её берёте, появляется злой волшебный итальянский торговец, продающий бутилированную воду. Вы думаете, что спасены, но есть подвох. Одна бутылка стоит 10000 долларов.

Итальянец предлагает вам следующую игру: вы можете поставить любую сумму денег b на бросок шестигранной кости. Если выпадет 5 или 6 (то есть с вероятностью $p = 1/3$), вы выигрываете b. В противном случае ваши деньги уменьшаются на b. Вы можете играть столько раундов, сколько захотите, пока у вас не кончатся деньги или вы не решите остановиться. Ваша цель — максимизировать вероятность покупки бутылки воды по предложенной *дешёвой* цене. Вычислите такую оптимальную вероятность.

Абстракция

Вероятности достижения

В контексте общих цепей Маркова мы можем определить марковский момент времени (stopping time) $\tau\colon \Omega \to \Theta$ как отображение, такое что $\{\tau \leq t\}$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым для всех $t \in \Theta$. Затем можно определить σ-алгебру событий, измеримых до момента τ:

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} \;:\; A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для всех } t \in \Theta\}$$

Если взять $\Theta = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ или $\Theta = [0, \infty]$, говорят, что выполняется строгое Марковское свойство, если

$$\mathbb{E}_\mu[F(\theta_\tau \mathbf{X}) \mid X_\tau = x, \tau < \infty] = \mathbb{E}_x[F(\mathbf{X})]$$

для всех ограниченных измеримых отображений $F\colon D(E) \to \mathbb{R}$ и для всех марковских моментов, таких что $\mathbb{P}_\mu(\tau < \infty) > 0$. Заметьте, что в этой общей структуре требуются некоторые дополнительные предположения, чтобы гарантировать выполнение этого свойства; оно не является простым следствием Марковского свойства. Отсюда и название **строгое** Марковское свойство. В этом смысле мы доказали, что цепь Маркова с дискретным временем ($\Theta = \mathbb{N}$) на счётном пространстве состояний (или даже на польских пространствах с небольшими адаптациями) обладает строгим Марковским свойством.