Глава 7.2. Избранные темы: Дерево Гальтона-Уотсона

Процесс Гальтона-Ватсона — это стохастическая модель, описывающая эволюцию популяции, в которой каждый индивидуум размножается независимо в соответствии с одним и тем же распределением вероятностей. Модель была впервые представлена Ирене-Жюлем Бьенеме в 1845 году, а позднее независимо разработана Фрэнсисом Гальтоном и Генри Уильямом Ватсоном в 1874 году для изучения вымирания фамилий.

Первоначальная мотивация исходила из интереса Гальтона к генеалогическим древам и вопросу о том, сохранятся ли аристократические семьи с течением времени. Ватсон и Гальтон вывели вероятность вымирания фамилии, обнаружив, что фамилии в конечном итоге исчезают. С тех пор модель нашла применение не только в генеалогии, но и в биологии (динамика популяций, деление клеток), физике (ветвящиеся процессы в ядерных реакциях), информатике (анализ древовидных структур данных) и экономике (ветвление фирм и организаций).

Размер популяции в следующем поколении зависит только от текущего размера популяции и закона размножения, поэтому последовательность размеров популяции образует цепь Маркова.

Определения и результаты

Определение 0.1 (Процесс Гальтона-Ватсона)**.** Пусть $X_0, X_1, X_2, \ldots$ — последовательность случайных величин (представляющих размеры популяции в каждом поколении). Мы говорим, что $(X_t)_{t\geq 0}$ образует **процесс Гальтона-Ватсона**, если:

1. $X_0 = 1$ (мы начинаем с одного предка).
2. Для каждого $t \geq 1$, $X_{t+1} = \sum_{n=1}^{X_t} Z_{t,n}$, где $Z_{t,n}$ представляет собой число потомков n-го индивидуума в поколении t.
3. Случайные величины $(Z_{t,n})_{t\geq 0, n\geq 1}$ являются н.о.р. на $\mathbb{N}$: $\mathbb{P}(Z_{t,n} = k) = p_k$ с $\sum_{k\geq 0} p_k = 1$.

Распределение вероятностей $(p_k)_{k\geq 0}$ называется **распределением потомства** процесса.

Примечание. Процесс Гальтона-Ватсона — это цепь Маркова на пространстве состояний $S = \mathbb{N}$, где состояние 0 является поглощающим (как только популяция вымирает, она исчезает навсегда). Если $X_t = 0$, то $X_{t+1} = X_{t+2} = \cdots = 0$. При условии $X_t = n$, величина X_{t+1} представляет собой сумму n н.о.р. случайных величин с распределением (p_k). Следовательно, определяя $(p_k^{(n)})$ как n-ю свёртку (p_k), имеем вероятности перехода для X_t:

$$\mathbb{P}(X_{t+1} = k \mid X_t = n) = p_k^{(n)}$$

Заметим, что $(p^{(n)})$ определяется соотношениями

$$p_k^{(1)} = p_k$$
$$p_k^{(n+1)} = \sum_h p_h^{(n)} p_{k-h}$$

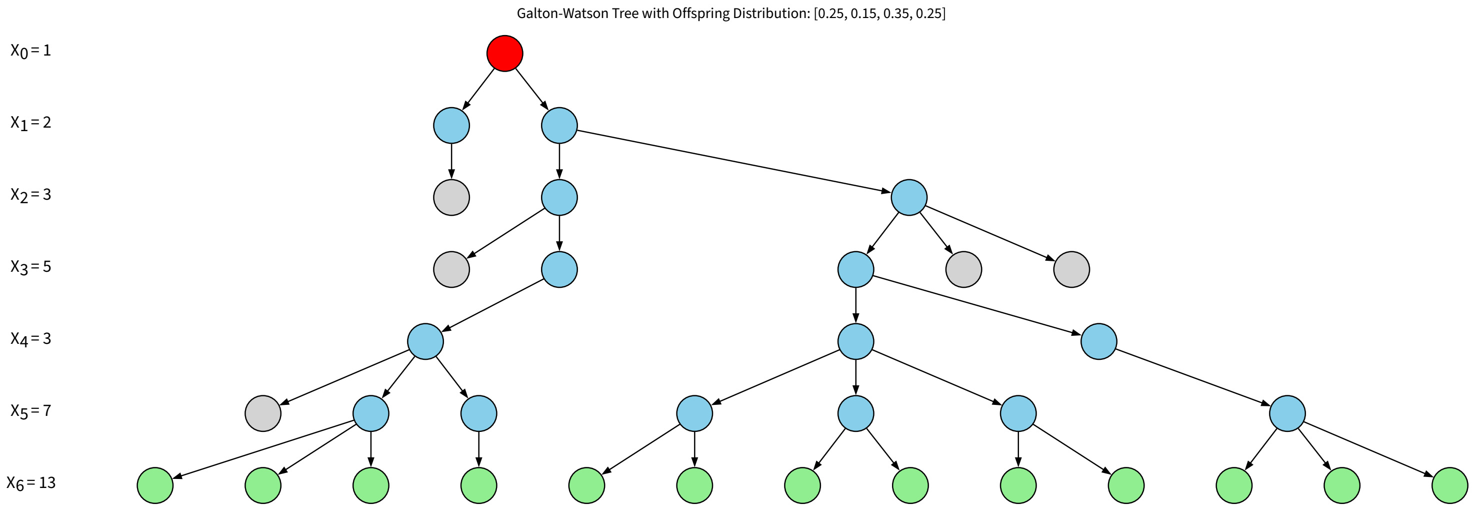

Рисунок 1

В частности, важно охарактеризовать вероятность[1] $\zeta = \mathbb{P}(\tau_0 < \infty)$, вероятность того, что процесс вымрет. Хотя это не особо полезно для вычислений, можно заметить, что для того чтобы процесс вымер в момент времени t, все индивидуумы в момент времени $t-1$ должны иметь 0 потомков:

$$\zeta = \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_0 = t) = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_0 = t \mid X_{t-1} = k)\mathbb{P}(X_{t-1} = k) = \sum_{t,k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_{t-1} = k) p_0^k$$

Значение ζ определяется значениями распределения потомства (p_k), поэтому мы хотим понять, в частности, когда $\zeta = 1$, а когда $\zeta < 1$. Определим функцию

$$\phi(z) := \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \qquad |z| \leq 1$$

которая является производящей функцией распределения потомства. В частности,

$$\phi(0) = p_0, \phi(1) = 1, \phi'(1) = \mathbb{E}[Z] = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k$$

Лемма 0.1. *Пусть* $\phi_t(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = k) z^k = \mathbb{E}\left[z^{X_t}\right]$, *для* $z \in [0, 1]$. *Тогда выполняется*

$$\begin{cases} \phi_0(z) = z \\ \phi_1(z) = \phi(z) \\ \phi_{t+1}(z) = \phi(\phi_t(z)) \end{cases}$$

Более того, ϕ_t *является неотрицательной, неубывающей, выпуклой и аналитической при* $0 \leq z < 1$.

[1] Как обычно, здесь и далее $\tau_0 = \inf\{t \geq 0 : X_t = 0\}$ — момент достижения 0.

Доказательство. Тождества для ϕ_0 и ϕ_1 следуют из определения. При условии значения Z_1 имеем

$$\begin{aligned}\phi_{t+1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{t+1}=k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{t+1}=k \mid X_1=j)\mathbb{P}(X_1=j)z^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} p_j \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t=k)z^k\right)^j = \phi(\phi_t(z))\end{aligned}$$

Альтернативно, используя условное математическое ожидание, $\mathbb{E}[z^{X_{t+1}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[z^{X_{t+1}} \mid X_1]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[z^{X_t}]^{X_1}] = \phi(\phi_t(z))$, поскольку при условии X_1, X_{t+1} является суммой X_1 независимых процессов Гальтона-Ватсона.

Будучи степенным рядом с неотрицательными коэффициентами, ϕ является неотрицательной, неубывающей, выпуклой и аналитической при $|z| < 1$. Следовательно, её степени $\phi \circ \phi \circ \ldots \circ \phi$ также неотрицательны, неубывающие, выпуклые и аналитические. $\square$

Теорема 0.1. *Пусть $(X_t)_{t\geq 0}$ — процесс Гальтона-Ватсона с распределением потомства, имеющим производящую функцию вероятностей ϕ и среднее $\mu = \mathbb{E}[Z] = \phi'(1) \in [0,\infty]$. Тогда ζ является наименьшей неподвижной точкой ϕ, то есть наименьшим решением уравнения*

$$z = \phi(z), \qquad z \in [0,1]$$

В частности:

1. *Если $p_0 = 0$, тривиально $\zeta = 0$.*
2. *Если $p_0 > 0$ и $\mu \leq 1$, то популяция в конечном итоге вымирает п.н., то есть $\zeta = 1$.*
3. *Если $\mu > 1$, то $\zeta < 1$ и*
$$\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = 1 - \zeta$$

Доказательство. Если $X_1 = k$, то вымирание произойдёт тогда и только тогда, когда вымрут k (независимых) деревьев, происходящих от каждого из k индивидуумов в момент времени 1, то есть с вероятностью ζ^k. Таким образом, при условии X_1:

$$\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\tau_0 < \infty \mid X_1 = k)\mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \zeta^k = \phi(\zeta)$$

То есть ζ является неподвижной точкой ϕ. Нам нужно проверить, что она является минимальной.

Пусть $\zeta_t = \mathbb{P}(X_t = 0) = \phi_t(0)$ — вероятность вымирания к поколению t. Тогда ζ_t неубывающая и $\zeta = \lim_{t\to\infty} \zeta_t$, в силу непрерывности вероятностных мер на монотонных последовательностях. Пусть ξ — любая другая неподвижная точка, $\xi = \phi(\xi)$, тогда, поскольку $\phi_t(z)$ неубывает по z:

$$\zeta_t = \phi_t(0) \leq \phi_t(\xi) = \xi$$

Следовательно, переходя к пределу, $\zeta \leq \xi$.

Если $p_0 = 0$, то $\phi(0) = 0$ и, следовательно, $\zeta = 0$ является минимальной неподвижной точкой, что доказывает пункт 1.

Заметим, что $\xi = 1$ всегда является неподвижной точкой, так как $1 = \phi(1)$. Однако, поскольку ϕ неубывающая и выпуклая, предположение $p_0 > 0$ влечёт, что существует не более одной другой неподвижной точки. Действительно, из элементарного математического анализа:

- если $\phi'(1) > 1$, существует ровно одна другая неподвижная точка $\zeta < 1$.

- если $\phi'(1) \leq 1$, то 1 является единственной неподвижной точкой, следовательно $\zeta = \xi = 1$.

Далее проверим, что $\mathbb{P}(\lim_{t\to\infty} X_t = \infty) = 1-\zeta$. Для каждого t такого, что $X_t \leq k$, существует вероятность не менее p_0^k вымирания на следующем шаге. Поэтому

$$\mathbb{P}(\tau_0 < \infty \mid |\{t : X_t \leq k\}| = \infty) = 1$$

Следовательно, на множестве $\{\tau_0 = \infty\}$ имеем, что $X_t \leq k$ лишь конечное число раз п.н. для любого k, и, таким образом, X_t расходится п.н. на $\{\tau_0 = \infty\}$. □

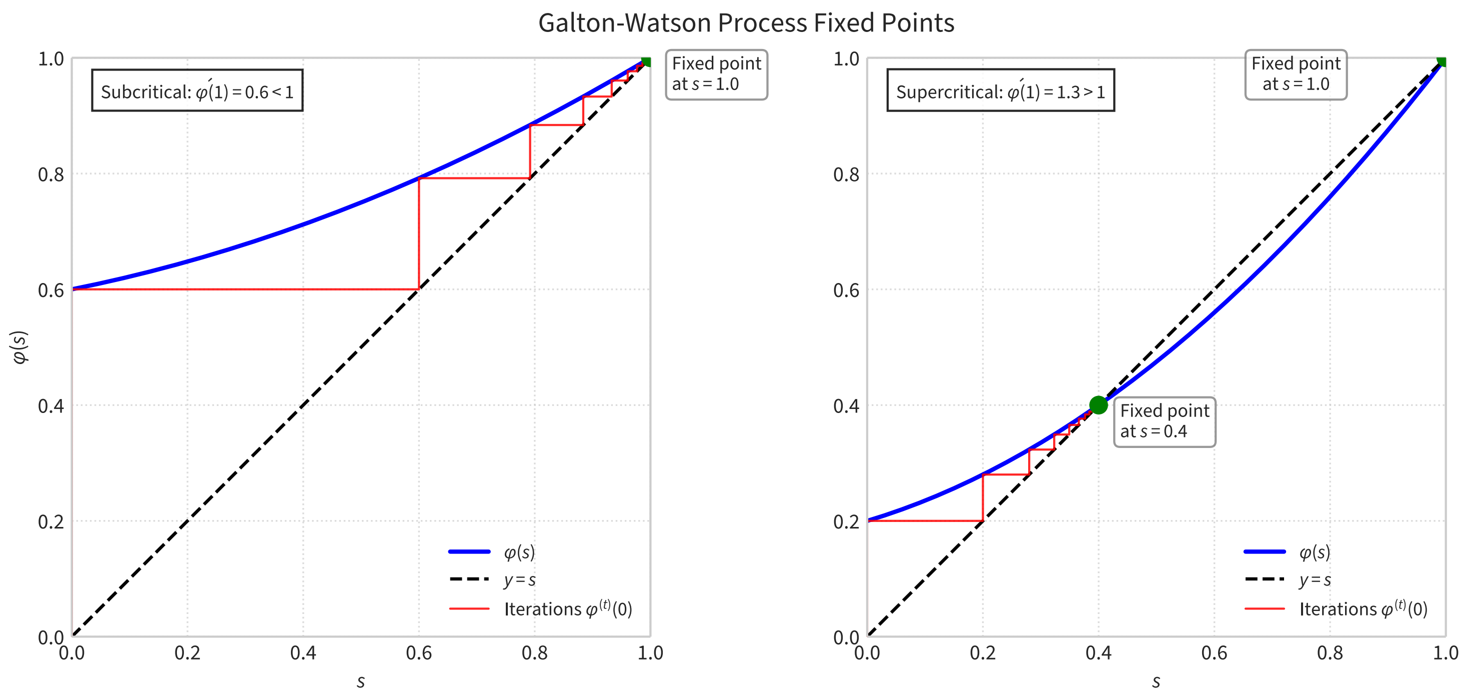

Рисунок 2: Вероятность вымирания — это наименьшая неподвижная точка $\phi(z)$. За исключением тривиальных случаев ($p_1 = 1$, что дает $\phi(z) \equiv z$ и $\zeta = 0$), существуют только две возможности. Если $\phi'(1) \leq 1$, существует только одна такая неподвижная точка, $\zeta = 1$. Если $\phi'(1) > 1$, существуют две неподвижные точки: 1 и $\zeta < 1$.

Базовые примеры

Пример 0.1 (Бинарное деление)**.** Рассмотрим бактерию, имеющую вероятность $p_0 \in (0,1)$ умереть до репликации, вероятность $p_2 \in (0,1)$ реплицироваться в две точные копии (митоз) и вероятность $p_1 = 1 - p_0 - p_2$ претерпеть митоз, при котором одна из двух копий умирает немедленно (так что чистое потомство имеет размер 1). Распределение потомства имеет $p_k = 0$ для $k \geq 3$ и $\mu = 1 - p_0 + p_2$. Чтобы найти вероятность вымирания ζ, нам нужно решить уравнение

$$z = \phi(z) \equiv p_0 + p_1 z + p_2 z^2 \equiv p_0 + (1 - p_0 - p_2)z + p_2 z^2$$

Решениями являются $z = 1$ и $z = p_0/p_2$. Следовательно

$$\zeta = \begin{cases} p_0/p_2 & \text{если } p_0 < p_2 \\ 1 & \text{если } p_0 \geq p_2 \end{cases}$$

и действительно $\zeta = 1$ тогда и только тогда, когда $\mu \leq 1$.

Пример 0.2 (Пуассоновское распределение потомства)**.** Предположим, что число потомков подчиняется распределению Пуассона с параметром $\lambda > 0$:

$$p_k = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Производящая функция вероятностей имеет вид:

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!} = e^{\lambda(z-1)}$$

Среднее значение равно $\mu = \lambda$, поэтому:

- Если $\lambda \leq 1$, вымирание происходит с вероятностью 1.
- Если $\lambda > 1$, вероятность вымирания ζ является наименьшим решением уравнения $e^{\lambda(z-1)} = z$.

Упражнение 0.1. Рассмотрим процесс Гальтона-Ватсона, где каждый индивидуум имеет случайное число потомков в соответствии с геометрическим распределением с параметром $p \in (0,1)$, т.е. $p_k = p(1-p)^k$ для $k \geq 0$. Вычислите вероятность вымирания и ожидаемое значение распределения потомства в терминах p.

Решение

Имеем $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k z^k = \frac{p}{1-(1-p)z}$ и $\mu = \phi'(1) = (1-p)/p$. Решение уравнения $\phi(z) = z$ приводит к корням 1 и $\frac{p}{1-p}$. Таким образом

$$\zeta = \begin{cases} 1 & \text{если } p \geq 1/2 \\ \frac{p}{1-p} & \text{если } p < 1/2 \end{cases}$$

что согласуется со значением μ.

Упражнение 0.2. Рассмотрим случайное блуждание Y_t на $\mathbb{Z}$ с $p_{x,x+1} = 1 - p_{x,x-1} = p \in (0, 1/2]$, при условии, что оно начинается в положительной области, то есть предположим $Y_0 = 0, Y_1 = +1$ для простоты. Пусть τ_0^+ будет, как обычно, моментом первого возвращения в 0, который конечен п.н., так как $p \leq 1/2$, и определим

$$X_n := |\{0 \leq t < \tau_0^+ \, : \, Y_t = n, Y_{t+1} = n+1\}|$$

как количество раз, когда Y_t пересекает ребро $(n, n+1)$ до возвращения в 0.

Докажите, что (X_n) является процессом Гальтона-Ватсона, найдите распределение потомства и вероятность вымирания ζ.

Решение

Зафиксируем $n \geq 1$ и пусть σ_l будет моментом l-го пересечения $(n, n+1)$, таким образом $Y_{\sigma_l - 1} = n$ и $Y_{\sigma_l} = n+1$. Момент остановки

$$\xi_l := \inf\{t > \sigma_l : Y_t = n\} \in \mathbb{N}$$

является первым возвращением на уровень n после k-го пересечения. Число пересечений $(n+1, n+2)$, происходящих в открытом интервале (σ_k, ξ_k), равно

$$Z_{n,l} := |\{\sigma_l < t < \xi_l : Y_t = n+1, Y_{t+1} = n+2\}|$$

В силу строгого марковского свойства, величины $Z_{n,l}$ независимы, и, таким образом, условия Определение 0.1 выполняются.
Мы интерпретируем пересечение $(n, n+1)$ как «родителя». Начиная с $n+1$, случайное блуждание должно либо шагнуть в $n+2$ (создавая потомка), либо шагнуть в n (умирая). Поскольку $p_{x,x+1} = p$, вероятность шагнуть в $n+2$ раньше n просто равна p (один шаг вправо), а вероятность шагнуть в n раньше $n+2$ равна $1-p$ (один шаг влево). Если блуждание попадает в $n+2$, оно возвращается в $n+1$ п.н., допуская дальнейшие попытки создания «потомства». Таким образом, $Z_{n,l}$ подчиняется геометрическому распределению с параметром успеха p:

$$\mathbb{P}(Z_{n,l} = k) = p^k(1-p), \quad k \geq 0$$

Таким образом, имеем $\phi(z) = (1-p)/(1-pz)$, $\mu = \phi'(1) = p/(1-p) \leq 1$, так как $p \leq 1/2$. Следовательно, $\zeta = 1$ для всех $p \leq 1/2$ (если $p > 1/2$, то приведенный выше аргумент неверен, так как возвращение в 0 из $Y_1 = 1$ не является достоверным).

Моменты и асимптотическое поведение

Далее мы рассмотрим поведение на больших временах, в частности, в надкритическом случае $\mu > 1$.

Утверждение 0.1. *Пусть $(X_t)_{t\geq 0}$ — процесс Гальтона-Ватсона с распределением потомства (p_k).*

1. *Для $\mu = \mathbb{E}[Z] = \sum_k kp_k$ выполняется $\mathbb{E}[X_t] = \mu^t$ для $t \geq 0$.*
2. *Предполагая, что $\sigma^2 := \mathrm{Var}(Z) = \sum_k (k-\mu)^2 p_k < \infty$, для $t \geq 0$ выполняется*

$$\mathrm{Var}(X_t) = \begin{cases} \sigma^2 \mu^{t-1} \frac{\mu^t - 1}{\mu - 1} & \text{если } \mu \neq 1 \\ t\sigma^2 & \text{если } \mu = 1 \end{cases}$$

Доказательство.

1. $\mathbb{E}[X_t] = \phi_t'(1)$. По индукции, используя Лемма 0.1, $\phi_1'(1) = \phi'(1) = \mu$. $\phi_{t+1}'(1) = \phi'(\phi_t(1))\phi_t'(1)$. Но $\phi_t(1) = 1$ и $\phi_t'(1) = \mu^t$ по предположению индукции.
2. Для дисперсии рассуждаем аналогично, используя $\mathrm{Var}(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2 = \phi_t''(1) + \phi_t'(1) - \phi_t'(1)^2$ и применяя индукцию.

□

Теорема 0.2. *Существует случайная величина $M \geq 0$ с $\mathbb{E}[M] < \infty$ и $\mathbb{P}(M = 0) \geq \zeta$, такая что предел*

$$\lim_{t\to\infty} X_t \mu^{-t} = M$$

существует п.н.

Доказательство. По определению X_t

$$\mathbb{E}[X_t \mid (X_{t-1}, X_{t-2}, \dots, X_0)] = \mu X_{t-1}$$

Следовательно, $M_t := X_t \mu^{-t}$ является неотрицательным мартингалом. По теореме Дуба о сходимости, предел M последовательности M_t существует п.н. и интегрируем. Когда $\tau_0 < \infty$, X_t в конечном итоге обнуляется, поэтому $M = 0$ на $\{\tau_0 < \infty\}$. □

Примечание. Предыдущая теорема устанавливает, что $X_t \mu^{-t}$ стабилизируется п.н. (возможно, в 0) при $t \to \infty$:

$$X_t = \mu^{-t}(M + o_t(1))$$

при $t \to \infty$. Это асимптотическое поведение можно визуализировать с помощью численного моделирования: каждый раз, когда мы сэмплируем процесс Гальтона-Ватсона, мы получаем возможно (если $\mu > 1$) другой предел M (т.е. предел M случаен). Таким образом, для каждой симуляции ω мы строим случайную величину $M(\omega)$, просто беря предел. Если мы хотим оценить распределение M, мы можем просто численно оценить $\mathbb{P}(M \in A)$, используя метод Монте-Карло: мы подсчитываем долю раз (для достаточно больших T), когда X_T/μ^T попадает в множество A.

Численная справедливость Теорема 0.2 понятна сразу[2].

Когда $\mu = 1$ (критический случай) и вымирание происходит с вероятностью 1, можно изучать поведение процесса при условии невымирания. Этот результат можно доказать аналитически, используя Лемма 0.1.

Теорема 0.3 (Условная предельная теорема). *Рассмотрим критический процесс Гальтона-Ватсона ($\mu = 1$, $\sigma^2 < \infty$). Тогда:*

$$\mathbb{P}(X_t > 0) \sim \frac{2}{\sigma^2 t} \quad \text{при } t \to \infty$$

Кроме того, при условии $\{\tau_0 > t\}$, нормированный размер популяции X_t/t сходится по распределению к экспоненциальному распределению:

$$(X_t/t \mid \tau_0 > t) \xrightarrow{d} \exp\left(\frac{2}{\sigma^2}\right)$$

Расширения и современные применения

Обобщения

Процессы Гальтона-Ватсона служат фундаментальными моделями с многочисленными обобщениями, например:

- **Многотипные процессы Гальтона-Ватсона:** Каждый индивидуум может относиться к одному из нескольких типов, с распределениями потомства, зависящими от типа. Теперь процесс представляет собой векторную цепь Маркова.
- **Ветвящиеся процессы с непрерывным временем:** Размножение происходит в случайные моменты времени в соответствии с процессом Пуассона, что приводит к цепям Маркова с непрерывным временем.
- **Пространственные процессы:** Каждому индивидууму приписывается положение в пространстве, и распределение потомства зависит от этого положения.

Хотя исторические корни процесса Гальтона-Ватсона лежат в генеалогии, модель эффективно описывает любую систему, где «объекты» производят свои «копии» независимо.

[2] Вы можете редактировать код, включая различные методы выборки, изменяя размер редактора.

Эпидемиология и распространение вирусов

В современной эпидемиологии распределение потомства представляет собой число вторичных инфекций, вызванных одним инфицированным индивидуумом. Среднее значение μ соответствует базовому репродуктивному числу, R_0. В отличие от стандартных моделей SIR, которые предполагают детерминированное смешивание, ветвящиеся процессы учитывают *стохастичность ранних вспышек*. Они особенно полезны для моделирования событий «суперраспространения», где распределение потомства (p_k) имеет тяжелые хвосты (например, p_0 велико, но p_k для больших k существенно отлично от нуля). Это помогает рассчитать вероятность того, что вирус, занесенный в новую популяцию, вымрет естественным образом или вызовет эпидемию.

Полимеразная цепная реакция (ПЦР)

ПЦР — это метод молекулярной биологии, используемый для амплификации одной копии сегмента ДНК в миллионы копий. В идеальном сценарии это бинарный процесс Гальтона-Ватсона с $p_2 = 1$ (детерминированное удвоение). В реальности эффективность репликации составляет $p < 1$. Процесс моделируется как ветвящийся процесс, где каждая цепочка ДНК реплицируется с вероятностью p или неудачно завершается с вероятностью $1 - p$. Теория ветвящихся процессов используется для оценки дисперсии конечного числа копий, что критически важно для точности количественной ПЦР (кПЦР). Базовая модель Гальтона-Ватсона должна быть уточнена для учета двух физических реалий:

- **Насыщение:** Ветвление не может расти экспоненциально вечно. По мере приближения популяции X_t к предельной емкости K (исчерпание реагентов), среднее число потомства $\mu(X_t)$ падает ниже 1.
- **Неопределенность параметров:** Эффективность репликации p неизвестна точно и может зависеть от условий работы оборудования.

Мы моделируем это, помещая априорное распределение на эффективность, например $p \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$, и предполагая плотностно-зависимое распределение потомства. Для размера популяции X_t, эффективная эффективность становится $p_{eff}(X_t) = p \cdot (1 - X_t/K)$.

Если мы запускаем T циклов, для успешного обнаружения необходимо, чтобы конечное количество цепочек X_T превысило определенное значение $\bar{x}$. Важный вопрос: *Сколько циклов T мы должны запустить, чтобы обеспечить обнаружение?* Другими словами, нас интересует момент первого достижения $\tau := \inf\{t : X_t \geq \bar{x}\}$. Даже если при больших значениях X_t имеет место более детерминированное поведение (в силу закона больших чисел), ранняя фаза ветвления и неопределенность в p вносят вклад в дисперсию случайной величины τ.

Если $\pi = \text{Beta}(\alpha, \beta)$ — это априорное распределение для p, вероятность неудачи (ложноотрицательного результата) на цикле T составляет:

$$\mathbb{P}(\text{False Negative}) = \int_0^1 \mathbb{P}(\tau > T \mid p)\pi(p)dp$$

В качестве примера мы можем оценить Интегральную Функцию Распределения (CDF) для τ. Мы отбираем выборку p в соответствии с π, и для каждого отобранного значения запускаем симуляцию процесса Гальтона-Ватсона с распределением потомства, зависящим от X_t. Для фиксированного допустимого риска ложноотрицательного результата $\varepsilon > 0$, мы затем выбираем время выполнения T^* такое, что $\mathbb{P}(\tau \leq T^*) \geq 1 - \epsilon$ (например, 99%).

Обратите внимание, что дисперсия в “экспоненциальной фазе” (рассматриваемая как горизонтальное распределение кривых) напрямую переходит в неопределенность количественной оценки. Этот горизонтальный сдвиг соответствует случайной величине M в мартингейльном пределе $X_t \approx M\mu^t$. В режиме насыщения определение M позволяет нам “вычислить в обратном порядке” начальную вирусную нагрузку.

Важно здесь построить логарифмический график:

- Пока X_t мала по сравнению с предельной емкостью $X_t \ll K$, мы находимся в классическом режиме Гальтона-Ватсона (распределение потомства постоянно в каждом поколении). Таким образом, имеем

$$\log X_t \simeq \log M + t \log \mu$$

  Мы видим это ясно на логарифмическом графике ниже, где мы видим по различным симуляциям "ширину" $\log M$, в то время как (после самых первых итераций) происходит линейный (для $\log X_t$, экспоненциальный для X_t) рост с коэффициентом, не зависящим от выборки.
- По мере роста X_t мы видим, что рост выходит на плато, поскольку мы приближаемся к насыщению и распределение потомства теряет эффективность.

В идеале априорное распределение (значения параметров α и β) предоставляется производителем оборудования для репликации. Мы можем видеть, как ожидаемое поведение проявляется довольно ясно в симуляции Гальтона-Ватсона. Фактически мы получаем значения, очень похожие на те, что используются в лабораториях для обнаружения низких вирусных нагрузок (поскольку мы начинаем всего с одной копии)[3].

Анализ алгоритмов

В информатике процессы Гальтона-Ватсона появляются в вероятностном анализе алгоритмов и структур данных. Например, *высота случайных бинарных деревьев поиска* или глубина рекурсии алгоритма Quicksort могут быть проанализированы путем вложения этих дискретных структур в ветвящиеся процессы с непрерывным временем. «Потомки» здесь соответствуют рекурсивным подзадачам, генерируемым на этапе разбиения.

Теория переноса нейтронов

Хотя это и более старое приложение, оно остается жизненно важным для ядерной безопасности. В ядерном реакторе нейтрон, сталкивающийся с ядром, может вызвать деление, высвобождая больше нейтронов. Это процесс Гальтона-Ватсона, где μ — коэффициент критичности. - $\mu < 1$: Докритический (реакция затухает). - $\mu = 1$: Критический (стабильная выходная мощность). - $\mu > 1$: Надкритический (мощность растет экспоненциально, потенциально опасно). Расчеты безопасности опираются на вычисление вероятности вымирания (прекращение цепной реакции деления) в сравнении с экспоненциальным разгоном.

[3] Вы можете редактировать код, включая различные методы выборки, изменяя размер редактора.