

# Контрольная Работа

- У вас есть 2 часа 15 минут.
- Вы можете проверить свои записи, книги и конспекты лекций на общем планшете.
- Вы не можете использовать свои собственные электронные устройства.

## Задачи

**Упражнение 0.1.** Пусть  $\mathbf{X} = (X_t)_{t \geq 0}$  — однородная цепь Маркова на конечном (или счётном) пространстве состояний  $S$  с переходными вероятностями  $(p_{x,y})_{x,y \in S}$  и начальным распределением  $\mu \in \mathcal{P}(S)$ , то есть  $\mathbb{P}(X_0 = x) = \mu_x$ . Зафиксируем  $T \geq 0$  и определим  $Y_t = X_{T-t}$ .

- а. Докажите, что  $\mathbf{Y} = (Y_t)_{t \in \{0, \dots, T\}}$  обладает марковским свойством. [Вычислите  $\mathbb{P}(Y_t = y_t | Y_{t-1} = y_{t-1}, \dots, Y_0 = y_0)$ ].  
 б. Предположим, что  $\mu = m$  является инвариантной вероятностью для  $\mathbf{X}$  и  $m_x > 0$  для всех  $x \in S$ . Проверьте, что  $\mathbf{Y}$  является однородной цепью Маркова.

### Решение

- а. Чтобы доказать марковское свойство для  $\mathbf{Y}$ , мы должны показать, что вероятность состояния в момент времени  $t$  зависит только от состояния в момент времени  $t-1$ , а не от каких-либо более ранних состояний. Пусть  $y_0, y_1, \dots, y_T$  — последовательность состояний, для которой  $p_{y_{t-1}, y_t} \mu_{y_0} > 0$  для всех  $t \leq T$ . Зафиксируем  $t \leq T$ ; вычислим условную вероятность:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_t = y_t | Y_{t-1} = y_{t-1}, \dots, Y_0 = y_0) &= \frac{\mathbb{P}(Y_t = y_t, Y_{t-1} = y_{t-1}, \dots, Y_0 = y_0)}{\mathbb{P}(Y_{t-1} = y_{t-1}, \dots, Y_0 = y_0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{T-t} = y_t, X_{T-t+1} = y_{t-1}, \dots, X_T = y_0)}{\mathbb{P}(X_{T-t+1} = y_{t-1}, \dots, X_T = y_0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(X_{T-t} = y_t) p_{y_t, y_{t-1}} p_{y_{t-1}, y_{t-2}} \cdots p_{y_1, y_0}}{\mathbb{P}(X_{T-t+1} = y_{t-1}) p_{y_{t-1}, y_{t-2}} \cdots p_{y_1, y_0}} = \frac{\mathbb{P}(X_{T-t} = y_t) p_{y_t, y_{t-1}}}{\mathbb{P}(X_{T-t+1} = y_{t-1})} \end{aligned} \quad (1)$$

Это конечное выражение зависит только от  $y_t$  и  $y_{t-1}$  (и от индекса времени  $t$ ), а не от  $y_{t-2}, \dots, y_0$ . Следовательно,  $\mathbf{Y}$  обладает марковским свойством. Переходная вероятность  $q_{x,y}^{(t)}$  для  $\mathbf{Y}$  перейти из состояния  $x$  в состояние  $y$  в момент времени  $t$  равна:

$$q_{x,y}^{t-1} = \mathbb{P}(Y_t = y | Y_{t-1} = x) = p_{y,x} \frac{\mathbb{P}(X_{T-t} = y)}{\mathbb{P}(X_{T-t+1} = x)} \quad (2)$$

Поскольку переходные вероятности зависят от  $t$  через распределения  $X_{T-t}$  и  $X_{T-t+1}$ , обращённая цепь  $\mathbf{Y}$ , в общем случае, **не** является однородной.

- б. Если начальное распределение  $\mu$  является инвариантной вероятностью  $m$ , то цепь стационарна. Это означает, что для любого момента времени  $t \geq 0$  распределение  $X_t$  также равно  $m$ . То есть,

$\mathbb{P}(X_t = x) = m_x$  для всех  $t$ . Мы можем подставить это в предыдущие формулы (либо Уравнение 1, либо Уравнение 2) и получить

$$q_{x,y} = p_{y,x} \frac{m_y}{m_x}$$

Это новое выражение для переходных вероятностей, которое мы можем обозначить  $p_{x,y}^\dagger$ , зависит только от состояний  $x$  и  $y$  и стационарного распределения  $m$ . Оно больше не зависит от индекса времени  $t$ . Следовательно, когда исходная цепь стационарна, обращённая цепь  $\mathbf{Y}$  является **однородной цепью Маркова**.

**Упражнение 0.2.** Игрок играет в повторяющуюся игру. На каждом ходу он выигрывает с вероятностью  $p \in (0, 1)$  и проигрывает с вероятностью  $1 - p$ . Чтобы поощрить игрока, казино дарит бесплатную ночь в своем роскошном номере любому игроку, который одержит серию из 3 последовательных побед. Игрок решает играть до тех пор, пока не выиграет приз (бесплатную ночь).

- Смоделируйте этот процесс как цепь Маркова  $(X_t)_{t \geq 0}$  на конечном пространстве состояний с поглощающим состоянием, представляющим выигрыш. Определите пространство состояний  $S$ , нарисуйте граф, представляющий цепь, найдите сообщающиеся классы и определите, какие из них являются замкнутыми, а какие — нет.
- Для произвольной цепи Маркова с марковским оператором  $P$  пусть  $A$  — непустое подмножество пространства состояний  $S$  («целевое множество»), и пусть  $\tau_A = \inf\{t \geq 0 : X_t \in A\}$  — первый момент времени, когда цепь попадает в множество  $A$ . Для любого состояния  $x \in S$  пусть  $u(x) = \mathbb{E}_x[\tau_A \mathbf{1}_{\tau_A < \infty}]$  — математическое ожидание времени достижения  $A$  при старте из  $x$ <sup>1</sup>. Покажите, что  $u$  является решением задачи для неизвестной функции  $v$ :

$$\begin{cases} (I - P)v = 1 & \text{на } A^c \\ v = 0 & \text{на } A \end{cases}$$

- Предположим, что  $p = 1/2$ . Казино может установить стоимость одной игры для игрока (скажем, она составляет  $d$  долларов, независимо от того, выигрывает игрок или проигрывает). Бесплатная ночь обходится казино в 100 долларов. При каких значениях  $d$  казино в среднем будет получать прибыль?

### Решение

- Состояние системы должно отражать прогресс игрока на пути к цели, то есть количество последовательных выигрышей. Пусть  $X_t$  — количество выигрышей после последнего проигрыша (длина текущей выигрышной серии) после  $t$ -го хода. Так,  $X_0 = 0$ . После первого хода  $X_1 = 1$ , если был выигрыш, и  $X_1 = 0$ , если был проигрыш, и так далее. Возможные значения являются элементами пространства состояний  $S = \{0, 1, 2, 3\}$ . Состояние  $X_t = 0$  означает, что игрок только что проиграл, 1 — что игрок одержал одну победу после проигрыша, и так далее. Когда  $X_t = 3$ , игрок выигрывает бесплатную ночь и прекращает играть. Это можно визуализировать с помощью следующего графа:

<sup>1</sup>Вы можете предположить, что  $\mathbb{P}_x(\tau_A < \infty) = 1$  для всех  $x \in A$ , если хотите упростить обозначения. В этом случае  $u(x) = \mathbb{E}_x[\tau_A]$ .

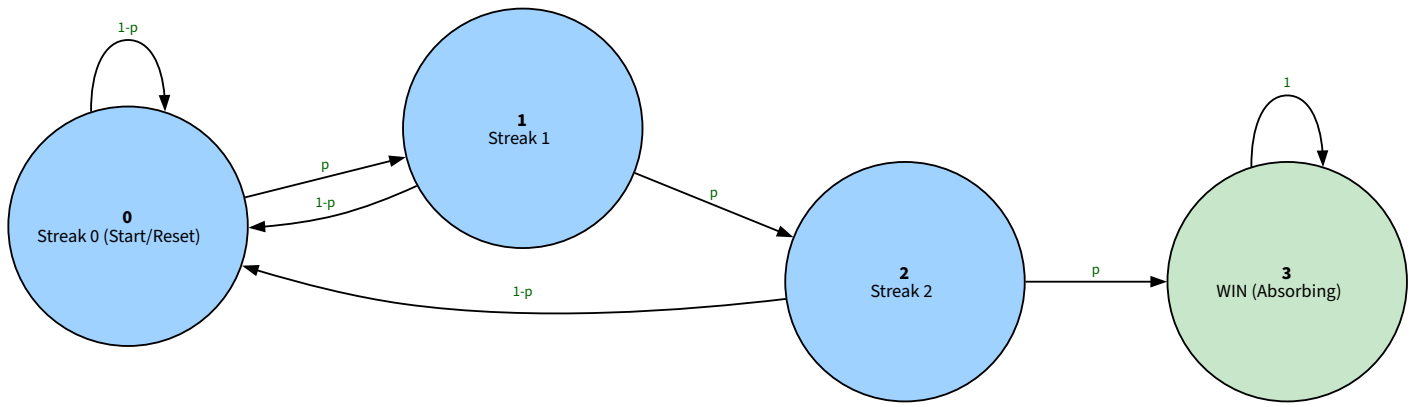


Рисунок 1

$\{0, 1, 2\}$  — незамкнутый сообщающийся класс.  $\{3\}$  — замкнутый сообщающийся класс, который поглощает цепь с вероятностью 1,  $\mathbb{P}(\tau_3 < \infty) = 1$ .

- б. Пусть  $u$  — функция, определённая в условии задачи. Если  $x \in A$ , то  $\tau_A = 0$   $\mathbb{P}_x$ -п.н., поэтому  $u = 0$ . Рассмотрим случай  $x \notin A$ . Заметим, что в этом случае

$$\tau_A = \sum_{t=0}^{\tau_A} \mathbf{1}_{X_t \notin A} = \mathbf{1}_{X_0 \notin A} + \sum_{t=1}^{\tau_A} \mathbf{1}_{X_t \notin A} = 1 + \sum_{t=0}^{\tau_A-1} \mathbf{1}_{X_{t+1} \notin A}$$

Заметим, что в тонком случае, когда  $\mathbb{P}(\tau_A < \infty) < 1$ , это равенство всё ещё верно, просто обе части уравнения могут быть равны  $+\infty$ . В частности, они совпадают на событии  $\{\tau_A < \infty\}$ , то есть на траекториях  $\mathbf{X}$ , которые в конечном итоге достигают  $A$ .

Также, для  $X_0 \notin A$ , имеем  $\tau_A(\mathbf{X}) - 1 = \tau_A(\theta_1 \mathbf{X})$  (что также верно, когда обе части равны  $+\infty$ ), где  $\theta_1$  — оператор сдвига времени. Тогда, обуславливая по первому шагу, для  $x \notin A$  имеем

$$\begin{aligned} u(x) &= \mathbb{E}_x[\tau_A \mathbf{1}_{\tau_A < \infty}] = 1 + \sum_y \mathbb{E}_x \left[ \sum_{t=0}^{\tau_A-1} \mathbf{1}_{X_{t+1} \mathbf{1}_{\tau_A < \infty} \notin A} \mid X_1 = y \right] \\ &= 1 + \sum_y p_{x,y} \mathbb{E}_y \left[ \sum_{t=0}^{\tau_A} \mathbf{1}_{X_t \mathbf{1}_{\tau_A < \infty} \notin A} \right] = 1 + (Pu)(x) \end{aligned}$$

- с. Нам нужно найти математическое ожидание числа ходов до выигрыша, начиная из состояния 0. Это в точности величина  $u(0)$ , где целевое множество —  $A = \{3\}$ . Нам дано, что  $p = 1/2$ . Система уравнений, представляя  $v$  как вектор  $(v_0, \dots, v_3)$ , имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v_0 = 1 + \frac{1}{2}v_1 \\ v_1 = 1 + \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_2 \\ v_2 = 1 + \frac{1}{2}v_0 + \frac{1}{2}v_3 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

$v_0 = 2 + v_1$ , отсюда  $v_1 = 4 + v_2$ , тогда  $v_2 = 1 + 1 + \frac{1}{2}(1 + v_1) = 4 + v_2/2$ . А именно,  $v_2 = 8$ ,  $v_1 = 12$ ,  $v_0 = 14$ . Математическое ожидание числа игр, которые игрок сыграет, чтобы выиграть приз, равно 14. Следовательно, казино будет получать прибыль в среднем, если  $14d > 100$  долларов: плата не менее \$7.15 за ход гарантирует положительную среднюю прибыль.

**Упражнение 0.3.** Алиса и Боб играют в игру против своего друга Криса. Алиса начинает с капиталом  $x_0 = 100$  долларов, Боб начинает с  $y_0 = 200$  долларов. Начинает Алиса, затем ход Боба, затем снова Алисы, и так далее. Мы предполагаем, что Крис принимает долги от Алисы и Боба, то есть они могут продолжать играть бесконечно, даже если их капитал отрицателен. На каждом ходу, когда они играют, игроки могут либо выиграть, либо проиграть один доллар с вероятностью  $1/2$ . Пусть  $X_t$  ( $Y_t$ ) — количество долларов, которое имеет Алиса (соответственно, Боб) после  $t$  ходов. Так, например,  $X_0 = 100$ , и  $X_1$  может быть либо 101, либо 99,  $X_2 = X_1$ , в то время как  $Y_0 = Y_1 = 200$ ,  $Y_2$  может быть либо 201, либо 199, и так далее. Конечно,  $Y_{2t+1}$  и  $X_{2t}$  имеют разную чётность, поэтому имеет смысл сравнивать их распределения только после того, как оба игрока сыграли одинаковое количество раз: в моменты времени  $2t$  для  $t \in \mathbb{N}$ .

Докажите, что для  $z \in \mathbb{Z}$

$$|\mathbb{P}(X_{2t} = z) - \mathbb{P}(Y_{2t} = z)| \leq q_{2t, y_0 - x_0}$$

где  $q_{t,x}$  — это вероятность того, что случайное блуждание, начавшееся в  $x$ , достигнет 0 после момента времени  $t$ . [Используйте метод *coupling*, как в доказательстве сходимости для апериодических положительно-возвратных цепей. Будьте осторожны с чётностью  $t$ .]

*Примечание:* Напомним, что для больших  $t$  и  $x \neq 0$  имеем  $q_{t,x} \approx |x|/\sqrt{\pi t}$  (мы делали это вычисление для  $x = 0$ , что аналогично случаю  $|x| = 1$ ), таким образом, мы получаем, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_z |\mathbb{P}(X_{2t} = z) - \mathbb{P}(Y_{2t} = z)| = 0$$

### 💡 Решение

Определим  $Z_t = Y_t - X_t$ .  $Z_t$  — простое симметричное случайное блуждание на  $\mathbb{Z}$ , начинающееся в точке  $y_0 - x_0$ . Пусть  $\tau := \inf\{t \geq 0 : X_t = Y_t\}$ .  $\tau$  — момент остановки (момент первого достижения 0 для  $Z_t$ ). Определим цепь Маркова  $\mathbf{Y}'$  следующим образом

$$\begin{cases} Y_t & \text{если } t \leq \tau \text{ или } t > \tau \text{ и } t \text{ нечётно} \\ X_{t-1} & \text{если } t > \tau \text{ и } t \text{ чётно} \end{cases}$$

Тогда  $\mathbf{Y}'$  имеет тот же закон распределения, что и  $\mathbf{Y}$  (изменяется на  $\pm 1$  в каждый чётный момент времени). Более того, в момент времени  $2t$

$$\mathbb{P}(X_{2t} = z, \tau < 2t) = \mathbb{P}(X_{2t-1} = z, \tau < 2t) = \mathbb{P}(Y'_{2t} = z, \tau < 2t) = \mathbb{P}(Y_{2t} = z, \tau < 2t)$$

Следовательно

$$|\mathbb{P}(X_{2t} = z) - \mathbb{P}(Y_{2t} = z)| \leq \mathbb{P}(\tau < 2t) = q_{2t, y_0 - x_0}$$