Контрольная Работа: Примеры

- У вас есть 1 час 50 минут.
- Вы можете проверить свои записи, книги и конспекты лекций на общем планшете.
- Вы не можете использовать свои собственные электронные устройства.

Задачи

Упражнение 0.1. У меня есть 3 зонта, и каждый из них может быть либо дома, либо в офисе. Каждый раз, когда я иду из дома в офис или из офиса домой, я беру с собой зонт, только если идёт дождь. Однако, если доступных зонтов нет, а на улице дождь, я промокаю. Вероятность того, что во время похода из офиса домой или из дома в офис идёт дождь, равна p. Найдите вероятность того, что я промокну во время произвольного похода.

Решение

Здесь время t представляет собой количество посещённых мест (офис/дом). Пусть X_t — количество зонтов в том месте, где я нахожусь. Это цепь Маркова с пространством состояний $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Если $x = 0$, то $p_{0,3} = 1$, так как после смены места все зонты окажутся в новом месте. $p_{1,3} = p$ (поскольку я возьму с собой единственный доступный зонт, только если идёт дождь), $p_{1,2} = 1 - p$; аналогично, $p_{2,2} = p = 1 - p_{2,1}$; и, наконец, $p_{3,1} = p = 1 - p_{3,0}$. Другими словами, для $x \geq 1$, $p_{x,y} = p$, если $y = 4 - x$ (поскольку я возьму зонт с собой), и $p_{x,y} = 1 - p$, если $y = 3 - x$.
Тогда матрица переходных вероятностей имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 1-p & p & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

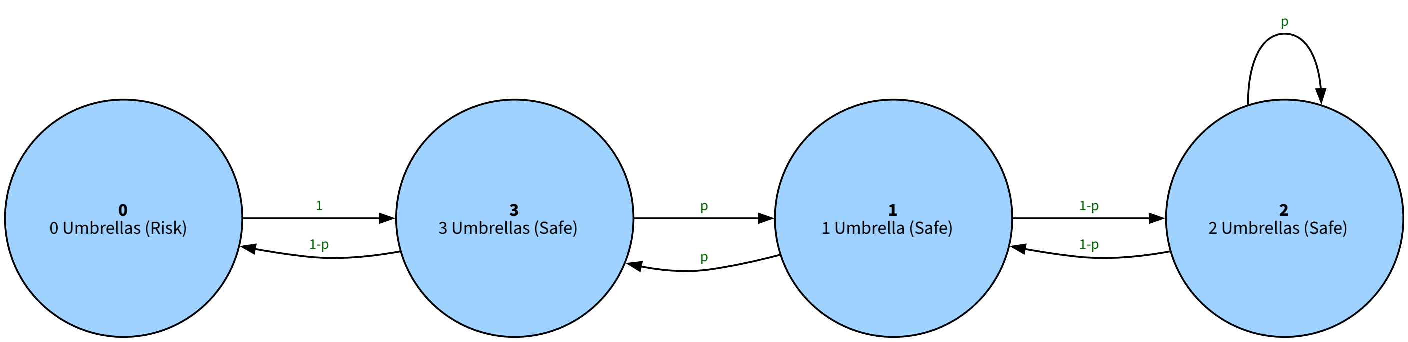

Рисунок 1

Это неразложимая цепь Маркова с единственной инвариантной вероятностью. Легко видеть, что $m_3 =$

$m_2 = m_1$. Тогда, используя $mP = m$, получаем $m = (\frac{1-p}{4-p}, \frac{1}{4-p}, \frac{1}{4-p}, \frac{1}{4-p})$. Вероятность промокнуть тогда равна $m_0 p = \frac{p(1-p)}{4-p}$.
Эта вероятность максимальна при $p = 2(2-\sqrt{3}) \approx 0.54$, что соответствует погоде в Москве. Заметим также, что если у меня будет N зонтов, вероятность промокнуть станет равной $p(1-p)/(N+1-p) \leq 1/(4N)$.

Упражнение 0.2. Дамокл был придворным при дворе тирана Дионисия Сиракузского. Время от времени Дионисий даёт ему задание, и в зависимости от результата отношение тирана к Дамоклу меняется. Однако со временем возможны только два исхода:

- Дамокл становится фаворитом при дворе и получает высокий титул. Это приносит ему a драхм.
- Дамокла изгоняют и лишают всего, что у него есть, стоимостью в b драхм.

Мы можем смоделировать репутацию Дамокла как однородную цепь Маркова с конечным числом состояний, которая рано или поздно попадёт либо в множество A (достижение высокого титула), либо в множество B (изгнание). Например, мы можем считать, что репутация — это целое числовое значение x в диапазоне от 0 (изгнание) до 100 (высокий титул).

а. Предполагая, что мы знаем переходные вероятности, сформулируйте линейную задачу для определения ожидаемого количества драхм, заработанных Дамоклом, если он начинает свою службу с репутацией $x \in S$.

В какой-то момент Дионисий, как известно, подвешивает над головой Дамокла меч, удерживаемый одним конским волосом. Перед выполнением каждого задания меч с вероятностью $p > 0$ может упасть на голову Дамокла (убив его).

б. Сформулируйте линейную задачу для определения ожидаемого количества драхм, заработанных Дамоклом, если он начинает свою службу с репутацией $x \in S$, когда над его головой висит меч.

Решение

Пусть τ — первый момент времени, когда репутация Дамокла определяется (то есть он получает высокий титул или его изгоняют). Обусловливая по первому шагу, функция $h(x) = \mathbb{E}[a\mathbf{1}_{X_\tau \in A} + b\mathbf{1}_{X_\tau \in B}]$ является решением задачи

$$\begin{aligned} &(I-P)h = 0 \qquad \text{на } (A \cup B)^c \\ &h = a \qquad \text{на } A \\ &h = b \qquad \text{на } B \end{aligned}$$

Если мы добавим Дамоклов меч, мы можем, например, считать, что добавляем дополнительную точку ξ в пространство состояний, скажем, $S' = S \cup \{\xi\}$. Если $(p_{x,y})$ — исходные переходные вероятности, то новая цепь Маркова имеет переходные вероятности, задаваемые формулами

$$\begin{aligned} &q_{x,\xi} = p, \qquad x \in S \\ &q_{x,y} = (1-p)p_{x,y} \qquad x, y \in S \\ &q_{\xi,\xi} = 1 \end{aligned}$$

Мы имеем ту же формулу для h, только теперь τ — это первый момент времени, когда цепь попадает в $A \cup B \cup \{\xi\}$. $h(x)$ теперь удовлетворяет, для $x \in S \setminus (A \cup B)$, уравнению $h(x) = \sum_{y \in S} q_{x,y} h(y) + 0 q_{x,\xi}$.

А именно, снова как уравнение на S (ξ было лишь вспомогательным):

$$\begin{aligned}
&(I-(1-p)P)h = 0 \qquad \text{на } (A\cup B)^c\\
&h = a \qquad \text{на } A\\
&h = b \qquad \text{на } B
\end{aligned}$$

Упражнение 0.3. Для однородной цепи Маркова объясните, почему каждая точка в незамкнутом сообщающемся классе C является транзитной.

Решение

Поскольку C не является замкнутым, существуют $y \in C$, $z \notin C$ такие, что $p_{y,z} > 0$. Но $x \leftrightarrow y$ и $z \nrightarrow x$. Пусть t — наименьшее время такое, что $p^{(t)}_{x,y} > 0$. Тогда $q := p^{(t+1)}_{x,z} \geq p^{(t)}_{x,y}p_{y,z} > 0$. Тогда каждый раз, когда цепь попадает в x, она с вероятностью не менее $q > 0$ никогда не вернётся. Следовательно, она вернётся лишь конечное число раз.

Упражнение 0.4. Неразложимая цепь Маркова на $\mathbb{N}$ обладает следующей особенностью. Для каждого $x \in S$ выполняется $p_{x,0} \geq p$ для некоторого $p > 0$.

а. Докажите, что $\mathbb{E}_x[\tau_x^+] < \infty$. б. Выведите (используя известные результаты), что существует единственная инвариантная вероятность m. в. Оцените

$$\sup_x |\mathbb{P}_y(X_t = x) - m_x| \leq ?$$

Решение

а. Зафиксируем x. В силу неразложимости, для некоторого t имеем $p^{(t)}_{0,x} > 0$. Таким образом, на каждом шаге мы с вероятностью не менее p переходим в 0 за один шаг, а затем возвращаемся в x за t шагов:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_0(\tau_x^+ \leq t) \geq p^{(t)}_{0,x}\\
&\mathbb{P}_y(\tau_x^+ \leq t+1) \geq pp^{(t)}_{0,x} := q\\
&\mathbb{P}_x(\tau_x^+ \geq k(t+1)) \leq (1-q)^k
\end{aligned}$$

и, следовательно, её математическое ожидание конечно.
б. Каждая неразложимая, положительно возвратная цепь Маркова допускает единственную инвариантную вероятность m.
в. Пусть Y_t — независимая цепь, запущенная с начальным распределением m. Пусть τ — первый момент времени, когда $X_t = Y_t$. Мы имеем, что

$$|\mathbb{P}_y(X_t = x) - m_x| \leq \mathbb{P}(\tau > t) \leq (1-p^2)^t$$

При некоторой осторожности мы можем построить (X, Y) так, чтобы на каждом шаге они оба с вероятностью p достигали 0. С тем же рассуждением мы получаем границу $(1-p)^t$.