Контрольная Работа (Пересдача)

Problems

Упражнение 0.1. Пусть $\mathbf{X} = (X_t)_{t\geq 0}$ — цепь Маркова на пространстве из двух состояний $S = \{1, 2\}$ с матрицей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$$

где $\alpha, \beta \in (0, 1)$.

a. Найдите единственное инвариантное распределение m этой цепи.

b. Зафиксируем $T > 1$. Пусть $Y_t = X_{T-t}$ — обращенная во времени цепь, стартующая из стационарного распределения. Определите матрицу перехода для $\mathbf{Y}$.

c. Пусть μ_t — закон распределения X_t при старте с начальной меры $\mu_0 \neq m$. Определите

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \|\mu_t - m\|_{TV}$$

Решение

a. $m_1 = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$, $m_2 = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

b. Цепь является обратимой, поэтому она имеет те же вероятности перехода.

c. P имеет собственные значения 1 и $1-\alpha-\beta$. Следовательно, предел равен $-\log(1-\alpha-\beta)$ (что составляет $-\infty$, если $\alpha+\beta = 1$, поскольку в этом случае X_t становятся независимыми одинаково распределенными (i.i.d.) при $t \geq 1$).

Упражнение 0.2. Жук перемещается по отрезку с узлами $S = \{a, b, c\}$. Узел a — это «отражающая стенка»: если жук находится в a, он переходит в b с вероятностью 1 на следующем шаге. Узел c — это «липкая ловушка» (поглощающее состояние): если жук находится в c, он остается в c навсегда. Из узла b жук переходит в c с вероятностью $p \in (0, 1)$ и возвращается в a с вероятностью $1 - p$. Найдите ожидаемое число шагов, необходимых жуку, чтобы попасть в ловушку, при старте из a.

Решение

Пусть τ_c — момент первого попадания в c, который конечен п.н., и пусть $u(x) := \mathbb{E}[\tau_c]$. Функция u удовлетворяет условиям $u(c) = 0$ и $(I - P)u = 1$. А именно: $u(b) = 1 + (1-p)u(a)$, $u(a) = u(b) + 1$. Отсюда $u(a) = 2/p$.

Упражнение 0.3. Пусть $S = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_N$, где $\mathbb{Z}_N := \{0, 1, \ldots, N\}$, а $i, j \in \mathbb{Z}_N$ являются соседями, если $i = j \pm 1 \pmod{N}$.

a. Определите, является ли простое случайное блуждание по S возвратным или невозвратным.
b. Для $N = 2$ определите (положительные, конечные в каждой точке) инвариантные меры для такого случайного блуждания.

Решение

a. Пусть $X_t = (Y_t, Z_t)$ — случайное блуждание. $\mathbf{X}$ неприводима, поэтому все точки обладают одинаковым свойством возвратности/невозвратности. $\mathbf{Y} = (Y_t)$ — это случайное блуждание по $\mathbb{Z}$ с вероятностями перехода $q_{y,y} = 1/2$, $q_{y,y\pm1} = 1/4$. Таким образом, $\mathbf{Y}$ возвратно и посещает каждую точку, например 0, бесконечно много раз с вероятностью 1. Каждый раз, когда Y_t посещает 0, X_t имеет строго положительную вероятность посетить $(0,0)$, следовательно множество $\{t : X_t = (0,0)\}$ бесконечно с вероятностью 1. А именно, $\mathbf{X}$ возвратно.
b. Равномерные меры $m_x = c$ являются единственными инвариантными мерами.