Теория Меры

В этом приложении представлен краткий обзор ключевых понятий и результатов теории меры; в нём рассматривается больше материала, чем фактически используется в книге. Некоторые доказательства намечены лишь в общих чертах, в частности, длинные, но простые моменты излагаются без подробностей. Однако в таких случаях приводятся точные ссылки. За всесторонним изложением теории меры мы отсылаем читателя к превосходной книге (Bogachev 2007 г.).

Пространства с мерой

Основные идеи Глава

Понятия меры, объёма, периметра, площади, вероятности и так далее математически формализуются тройкой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$. Ω соответствует пространству, в котором мы хотим *измерять*; это может быть любое непустое множество. $\mathcal{F}$ — это семейство подмножеств Ω, которые мы хотим измерять, так называемые *измеримые события*. $\mathcal{F}$ должно удовлетворять некоторым интуитивно понятным условиям (например, если мы можем измерить наступление A и B, мы можем измерить и ненаступление A или наступление $A \cup B$). μ — это сама мера (или объём, вероятность и т.д.), то есть это отображение, которое каждому измеримому множеству $A \in \mathcal{F}$ сопоставляет число $\mu(A)$. Основное свойство заключается в том, что $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
Следует помнить о двух проблемах:

- Мы хотим, чтобы равенство $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$ выполнялось также для бесконечных (счётных) сумм и объединений. Потому что в математике любят переходить к пределам.
- Мы хотим определять меры без необходимости задавать их значение на *каждом* измеримом множестве. Например, на вещественной прямой мы можем определить, что длина интервала $(a, b]$ равна $b - a$, и этого должно быть достаточно, чтобы охарактеризовать способ измерения длин на $\mathbb{R}$.

Эти две проблемы несколько усложняют дело. В этом разделе мы приводим некоторые основные определения и результаты, чтобы в дальнейшем решить эти проблемы.

Сигма-алгебры и измеримые пространства

Подобно тому, как топологии предоставляют строгую основу для таких понятий, как близость и сходимость, σ-алгебры и фильтрации формализуют понятия *доступной информации* и *измеримости*.

Определение 0.1 (π-система). Семейство $\mathcal{P}$ подмножеств множества Ω является π**-системой**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathcal{P}$ не пусто.

2. Для $A, B \in \mathcal{P}$ выполняется $A \cap B \in \mathcal{P}$.

Семейство $\mathcal{P}$ подмножеств множества Ω является **квази-π-системой**, или сокращённо **qπ-системой**, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\mathcal{P}$ не пусто.
2. Для $A, B \in \mathcal{P}$ существует конечное число *попарно непересекающихся* множеств $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{P}$ таких, что $A \cap B = \cup_i C_i$.

Определение 0.2 (λ-система)**.** Семейство $\mathcal{L}$ подмножеств множества Ω является **λ-системой**, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\emptyset \in \mathcal{L}$.
2. Если $A \in \mathcal{L}$, то $A^c \in \mathcal{L}$ (замкнуто относительно дополнения).
3. Если $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{L}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ (замкнуто относительно счётных дизъюнктных объединений).

Определение 0.3 (сигма-алгебра)**.** **σ-алгебра** на множестве Ω — это семейство $\mathcal{F}$ подмножеств Ω, которое является одновременно qπ-системой и λ-системой. Эквивалентно, оно удовлетворяет следующим условиям:

1. $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. Если $A \in \mathcal{F}$, то $A^c \in \mathcal{F}$ (замкнуто относительно дополнения).
3. Если $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность множеств из $\mathcal{F}$, то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$ (замкнуто относительно счётных объединений).

Измеримое пространство — это пара $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω — непустое множество, а $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω.

Примечание. Пересечение любого семейства σ-алгебр (соответственно, π-систем, λ-систем) на Ω также является σ-алгеброй (соответственно, π-системой, λ-системой). Это позволяет нам определить σ-алгебру, порождённую семейством множеств $\mathcal{C}$ и обозначаемую $\sigma(\mathcal{C})$, как самую слабую (также называемую *грубейшей* или *наименьшей*) σ-алгебру, содержащую $\mathcal{C}$ (аналогично определяются π-система и λ-система, порождённые $\mathcal{C}$). Она является пересечением всех σ-алгебр, содержащих $\mathcal{C}$. В более общем смысле, под *самой слабой* σ-алгеброй, удовлетворяющей некоторому свойству, мы понимаем пересечение всех σ-алгебр, обладающих этим свойством.

Пример 0.1 (Тривиальная и дискретная сигма-алгебры)**.** Для любого множества Ω множество всех его подмножеств (булеан) является σ-алгеброй, называемой **дискретной** σ-алгеброй. Это сильнейшая (максимальная) σ-алгебра на Ω.

Семейство $\{\emptyset, \Omega\}$ также является σ-алгеброй, называемой **тривиальной** σ-алгеброй. Это слабейшая σ-алгебра на Ω.

Пример 0.2 (Борелевские сигма-алгебры)**.** Если $(\Omega, \mathcal{T})$ — топологическое пространство, то σ-алгебра $\sigma(\mathcal{T})$, порождённая открытыми множествами (что эквивалентно, замкнутыми множествами), называется борелевской σ-алгеброй. Её элементы называются **борелевскими множествами**. Когда топология $\mathcal{T}$ ясна из контекста, борелевская σ-алгебра часто обозначается как $\sigma(\Omega)$. Обычно это так для евклидовых пространств, поэтому $\sigma(\mathbb{R})$ обозначает борелевскую σ-алгебру, порождённую стандартной топологией на $\mathbb{R}$.

Если $(\Omega, \mathcal{T})$ — топологическое пространство со *второй аксиомой счётности*, а $\mathcal{B}$ — база топологии $\mathcal{T}$, то борелевская σ-алгебра совпадает с σ-алгеброй, порождённой $\mathcal{B}$, то есть $\sigma(\mathcal{T}) = \sigma(\mathcal{B})$. Например, на $\mathbb{R}$ борелевская σ-алгебра порождается интервалами.

Пример 0.3 (Классы интервалов)**.** Если $\Omega = \mathbb{R}$, интервалы вида $(a, b]$ образуют π-систему. То же самое можно сказать и про открытые или замкнутые интервалы, или интервалы вида $[a, b)$. Аналогичные утверждения верны для прямоугольников в $\mathbb{R}^2$.

Если $\Omega = S^1$, класс замкнутых дуг на Ω является qπ-системой, но не π-системой. В отличие от случая $\Omega = \mathbb{R}$, пересечение двух дуг может быть объединением двух дуг.

Теорема 0.1 (Пи-лямбда теорема)**.** *Если $\mathcal{P}$ — это qπ-система, а $\mathcal{L}$ — λ-система, такие что $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$, то $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. Другими словами, слабейшая σ-алгебра и слабейшая λ-система, порождённые qπ-системой, совпадают.*

Теорема 0.1. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{L}$ — слабейшая λ-система, содержащая $\mathcal{P}$. Для $A \in \mathcal{L}$ определим

$$\mathcal{L}_A := \{B \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{L}\}$$

Заметим, что для $A \in \mathcal{L}$

- $\emptyset \in \mathcal{L}_A$.
- Если $B \in \mathcal{L}_A$, то $A \cap B^c = (A^c \cup (A \cap B))^c \in \mathcal{L}$. А именно, $\mathcal{L}$ замкнуто относительно дополнения.
- $\mathcal{L}_A$ замкнуто относительно счётных дизъюнктных объединений, так как $A \cap (\cup_i B_i) = \cup_i (A \cap B_i)$.
- Если $B \in \mathcal{P}$, то $A \cap B \in \mathcal{L}$ как конечное дизъюнктное объединение элементов из $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$.

Следовательно, $\mathcal{L}_A$ — это λ-система, содержащая $\mathcal{P}$, и в силу минимальности $\mathcal{L}$ мы заключаем, что $\mathcal{L}_A \supset \mathcal{L}$. Это, в свою очередь, означает, что для $A, B \in \mathcal{L}$ выполняется $A \cap B \in \mathcal{L}$. Другими словами, $\mathcal{L}$ является π-системой и λ-системой, а значит, и σ-алгеброй. $\square$

Иногда вместо σ-алгебр, π-систем и λ-систем удобно использовать алгебры и монотонные классы.

Определение 0.4 (Алгебра)**.** Семейство $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω является **алгеброй** (или **полем**), если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$.
2. Если $A \in \mathcal{A}$, то $A^c \in \mathcal{A}$ (замкнуто относительно дополнения).
3. Если $A, B \in \mathcal{A}$, то $A \cup B \in \mathcal{A}$ (замкнуто относительно конечных объединений).

Определение 0.5 (Монотонный класс)**.** Семейство $\mathcal{M}$ подмножеств множества Ω является **монотонным классом**, если оно удовлетворяет следующим свойствам:

1. Если $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — *возрастающая* последовательность множеств из $\mathcal{M}$ (т.е. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$), то $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$ (замкнуто относительно счётных возрастающих объединений).
2. Если $(B_n)_{n=1}^{\infty}$ — *убывающая* последовательность множеств из $\mathcal{M}$ (т.е. $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$), то $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{M}$ (замкнуто относительно счётных убывающих пересечений).

Теорема 0.2 (Теорема о монотонных классах)**.** *Пусть $\mathcal{A}$ — алгебра подмножеств множества Ω. Пусть $\mathcal{M}$ — монотонный класс подмножеств Ω. Если $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, то $\sigma(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}$.*

Теорема 0.2. Без ограничения общности предположим, что $\mathcal{M}$ — минимальный монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$. Мы докажем, что $\mathcal{M}$ является σ-алгеброй.

Для $A \in \mathcal{M}$ пусть $\mathcal{M}_A = \{B \subset \Omega : A \cap B \in \mathcal{M}, B^c \in \mathcal{M}\}$. Нетрудно проверить, что $\mathcal{M}_A$ — это монотонный класс, содержащий $\mathcal{A}$. Таким образом, $\mathcal{M}_A \supset \mathcal{M}$, что, в частности, означает, что $\mathcal{M}$ является π-системой. Но монотонный класс, который также является π-системой, есть σ-алгебра, что легко проверить. $\square$

Классы измеримых пространств

В этом разделе мы рассмотрим несколько свойств, которые определяют “хорошо устроенные” классы измеримых пространств. Это можно рассматривать как измеримый аналог различных свойств регулярности для топологических пространств.

Определение 0.6 (Атомы)**.** В измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ **атомами** называются элементы $\mathcal{F}$, полученные как классы эквивалентности отношения эквивалентности на Ω: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{1}_A(x) = \mathbf{1}_A(y) \quad \forall A \in \mathcal{F}$$

Определение 0.7 (Хаусдорфовы и сепарабельные пространства)**.** Измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ называется:

- **Хаусдорфовым**, если все атомы являются одноточечными множествами (точками Ω).
- **Сепарабельным**, если $\mathcal{F}$ порождается счётным семейством множеств из Ω.

Пример 0.4. $\mathbb{R}$ с борелевской σ-алгеброй является хаусдорфовым и сепарабельным.

В качестве контрпримера к свойству хаусдорфовости рассмотрим пространство $\Omega = \{a, b, c\}$ с σ-алгеброй $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$. Это пространство не является хаусдорфовым, потому что его атомы — это $\{a\}$ и $\{b, c\}$.

В качестве контрпримера к сепарабельности, несчётное пространство с дискретной σ-алгеброй не является сепарабельным.

Пример 0.5. Если $(\Omega, \mathcal{T})$ является хаусдорфовым (в топологическом смысле), то борелевское измеримое пространство $(\Omega, \sigma(\mathcal{T}))$ является хаусдорфовым (в смысле теории меры).

Измеримые функции

Определение 0.8 (Измеримая функция)**.** Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ — измеримые пространства. Функция $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ называется **измеримой** (или $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$-измеримой), если для любого $A \in \mathcal{F}_2$ прообраз $f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega_1 : f(\omega) \in A\}$ принадлежит $\mathcal{F}_1$.

Утверждение 0.1. *Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ — измеримые пространства, и пусть $\mathcal{C}$ — семейство подмножеств в Ω_2 такое, что $\mathcal{F}_2 = \sigma(\mathcal{C})$. Тогда f является $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$-измеримой тогда и только тогда, когда:*

$$f^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1, \quad \forall E \in \mathcal{C}$$

Утверждение 0.1. Операции над множествами естественным образом ведут себя при взятии прообраза (это сложный способ сказать, что $f^{-1}(E \cap F) = f^{-1}(E) \cap f^{-1}(F)$, и аналогичные свойства выполняются для элементарных операций над множествами). Поэтому легко проверить, что $\mathcal{F} := \{E \subset \Omega_2 : f^{-1}(E) \in \mathcal{F}_1\}$ является σ-алгеброй. Поскольку она содержит $\mathcal{C}$, она содержит и $\mathcal{F}_2$, то есть f является $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2$-измеримой. □

Если $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ — измеримое пространство, то семейство функций $\mathcal{F} \subset \Omega_2^{\Omega_1}$ порождает на Ω_1 σ-алгебру $\mathcal{F}_1 := \sigma(\mathcal{F}) \equiv \{f^{-1}(A) : f \in \mathcal{F}, A \in \mathcal{F}_2\}$: это слабейшая σ-алгебра, относительно которой все функции из $\mathcal{F}$ измеримы.

Примечание. Проверка измеримости функций может быть трудоёмкой (и в некотором роде скучной) задачей. Некоторые стандартные способы легко определить, что функция измерима:

- Композиция измеримых функций измерима (тривиально).
- Непрерывные функции между топологическими пространствами измеримы относительно соответствующих борелевских σ-алгебр (из Утверждение 0.1).
- Пусть $f_n\colon \Omega \to \mathbb{R} \cup -\infty \cup +\infty$ — последовательность борелевских измеримых функций. Точечные супремум и инфимум f_n также измеримы (интервалы $(-\infty, c]$ порождают борелевскую σ-алгебру и $\{\sup_n f_n \leq c\} = \cap_n \{f_n \leq c\}$). В частности, $\overline{\lim}_n f_n$ и $\underline{\lim}_n f_n$ измеримы.

Нетривиальные примеры

В целом, вопросы измеримости не пользуются большой любовью в мире математики, так как они либо тривиальны, либо искусственны. Конечно, есть и исключения.

Типичная проблема измеримости — следующая, возникающая в теории оптимизации: для каждого "случайного" исхода $\omega \in \Omega$ у нас есть несколько оптимальных стратегий $A_\omega \subset E$. Можем ли мы *измеримо* выбрать оптимальную стратегию? А именно, можем ли мы найти *измеримое* отображение $f\colon \Omega \to E$ такое, что $f(\omega) \in A_\omega$ для $\omega \in \Omega$? Измеримость здесь крайне важна, так как это минимальное требование для практического построения функции. Если у нас нет дополнительной информации, мы можем лишь предположить аксиому выбора, которая даст нам существование оптимального $f(\omega) \in E$ с $f(\omega) \in A_\omega$. Однако аксиома выбора — это стандартный способ определения неконструктивных объектов, которые обычно *неизмеримы*. Этот подход не представляет интереса в рамках оптимизации. Более интересный (измеримый) результат принадлежит Куратовскому и Рылль-Нардзевскому и имеет множество вариантов, см. (Bogachev 2007 г., Теорема 6.9.3).

Теорема 0.3 (Теорема Куратовского и Рылль-Нардзевского о селекции)**.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, а $(E, \mathcal{E})$ — польское пространство, где $\mathcal{E}$ — борелевская σ-алгебра. Предположим, у нас есть отображение $\Omega \ni \omega \mapsto A_\omega \in \mathcal{E}$ такое, что*

- *A_ω — непустое замкнутое множество в E для всех $\omega \in \Omega$.*
- *$\{\omega \in \Omega : A_\omega \cap O = \emptyset\} \in \mathcal{F}$ для всех открытых O в E (слабая измеримость A_ω).*

Тогда существует измеримое *отображение $f\colon \Omega \to E$ такое, что $f(\omega) \in A_\omega$ для всех $\omega \in \Omega$.*

Другой пример касается следующей проблемы. Пусть $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство, а Ω — непустое множество. Функция $f\colon \Omega \to E$ определяет на Ω σ-алгебру, назовём её $\mathcal{F}$, определённую как слабейшая σ-алгебра, при которой f измерима. Пусть g — другая функция $g\colon \Omega \to E$, и предположим, что g является $\mathcal{F}$-измеримой. *Верно ли, что g является функцией от f?* А именно, существует ли измеримая функция $h\colon E \to E$ такая, что $g = h \circ f$? Можно ожидать положительного ответа, так как для того, чтобы g была $\mathcal{F}$-измеримой, она должна определяться функцией f. Ответ действительно "да", но требуются гипотезы: если $(E, \mathcal{E})$ — польское пространство (или измеримо изоморфно польскому пространству), то такая функция h действительно существует.

Произведение измеримых пространств

Определение 0.9 (Произведение сигма-алгебр)**.** Пусть T — произвольное индексное множество. Для каждого $t \in T$ пусть $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ — измеримое пространство. Для $J \subset T$ определим пространство-произведение

$$\Omega_J := \prod_{t \in J} \Omega_t$$

и пусть $\mathcal{F}_J = \prod_{t \in J} \mathcal{F}_t$ — σ-**алгебра-произведение** на Ω_J, определённая как σ-алгебра, порождённая цилиндрическими множествами вида $\prod_{t \in J} A_t$, где $A_t \in \mathcal{F}_t$ для всех $t \in J$ и $A_t = \Omega_t$ для всех t, кроме конечного их числа.

В предыдущем Определение 0.9 мы ограничились подмножеством $J \subset T$, чтобы можно было также определить σ-алгебру на Ω_T (а не только на Ω_J), индуцированную подмножеством $J \subset T$. Это слабейшая σ-алгебра на Ω_T, при которой каноническая проекция $\pi_J^T \colon \Omega_T \to \Omega_J$ измерима. То есть мы можем рассмотреть на Ω_T σ-алгебру $\{(\pi_J^T)^{-1}(A), A \in \mathcal{F}_J\}$. С некоторым злоупотреблением обозначениями, эту σ-алгебру обычно также обозначают $\mathcal{F}_J$.

Меры

Определение 0.10 (Мера)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство (т.е. Ω — множество, а $\mathcal{F}$ — σ-алгебра на Ω). **Мера** μ на $(\Omega, \mathcal{F})$ — это функция $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty]$ такая, что:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. (Счётная аддитивность) Если $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно непересекающихся множеств из $\mathcal{F}$ (т.е. $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$), то $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$.

Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, а μ — мера, называется **пространством с мерой**.

Мера μ является **вероятностной мерой**, если $\mu(\Omega) = 1$. В таком случае $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ называется **вероятностным пространством**.

Мера μ является σ**-конечной**, если существует счётное семейство измеримых множеств $\Omega_i \in \mathcal{F}$ таких, что $\Omega = \bigcup_i \Omega_i$ и $\mu(\Omega_i) < \infty$.

Функция на множествах со свойствами, подобными мере, но определённая на семействе множеств, которое не обязательно является σ-алгеброй, называется **содержанием**. В литературе её также называют **предмерой**, в частности, когда σ-алгебра заменена алгеброй.

Определение 0.11 (Содержание)**.** Пусть Ω — непустое множество, а $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств Ω, причём $\emptyset \in \mathcal{A}$. Отображение $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ является **внешним содержанием**, если

- $\mu(\emptyset) = 0$ (или эквивалентно $\mu(\emptyset) < \infty$).
- Если $A, A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ и $A \subset \cup_{i=1}^{n} A_i$, то $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.

μ является **содержанием**, если последнее условие заменено на более сильное:

- $\mu(\cup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$ для любого *конечного* семейства $(A_i)_{i=1}^{n}$ *попарно непересекающихся* элементов из $\mathcal{A}$ такого, что $\cup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$.

μ является σ**-аддитивным содержанием**, если последнее условие выполняется для счётных семейств:

- $\mu(\cup_i A_i) = \sum_i \mu(A_i)$ для любого *счётного* семейства $(A_i)_i$ *попарно непересекающихся* элементов из $\mathcal{A}$ такого, что $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$.

Утверждение 0.2. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, а μ и ν — две вероятностные меры на $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{P}$ — это π-система такая, что $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{F}$, и $\mu(A) = \nu(A)$ для всех $A \in \mathcal{P}$, то $\mu = \nu$ на $\mathcal{F}$.*

Утверждение 0.2. Легко проверить, что семейство множеств, на которых две вероятностные меры совпадают, является λ-системой. Поскольку оно содержит π-систему, порождающую $\mathcal{F}$, по Теорема 0.1 они совпадают на всей σ-алгебре. $\square$

Пример 0.6. Пусть $\Omega = \mathbb{R}$, и пусть $\mathcal{P} = \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$. $\mathcal{P}$ — это π-система. σ-алгебра, порождённая $\mathcal{P}$, $\sigma(\mathcal{P})$, — это борелевская σ-алгебра на $\mathbb{R}$. Пусть $\mathcal{L}$ — семейство всех подмножеств $A \subset \mathbb{R}$ таких, что A или A^c счётно или имеет счётное дополнение. Тогда $\mathcal{L}$ — это λ-система, и $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. По пи-лямбда теореме, $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Более того, согласно Утверждение 0.2, если две вероятностные меры μ и ν на $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ совпадают на всех интервалах вида $(-\infty, a]$, то $\mu = \nu$. (Кумулятивная) функция распределения F_μ вероятностной меры μ определяется как $F_\mu(x) = \mu((-\infty, x])$, так что это показывает, что функция распределения однозначно определяет вероятностную меру.

Образ меры

Если $(\Omega, \mathcal{F})$ и $(E, \mathcal{E})$ — измеримые пространства, то измеримая функция $f\colon \Omega \to E$ может быть поднята до линейного отображения $f_\sharp$, переводящего меры на Ω в меры на E как

$$f_\sharp \mu := \mu \circ f^{-1}$$

что означает, для $A \in \mathcal{E}$

$$(f_\sharp \mu)(A) := \mu(\{x \in \Omega : f(x) \in A\})$$

Заметим, что $f_\sharp$ переводит вероятностные меры в вероятностные меры.

Примечание. Если мы обозначим через $\wp(\Omega)$ пространство вероятностных мер на Ω, мы можем рассмотреть инъекцию $x \ni \Omega \mapsto \delta_x \in \wp(\Omega)$, где **мера Дирака в точке** x определяется как вероятностная мера $\delta_x(A) = \mathbf{1}_A(x)$. Отображение $f_\sharp$ тогда обладает следующими свойствами

- $f_\sharp \delta_x = \delta_{f(x)}$
- $f_\sharp(\alpha\mu + (1-\alpha)\nu) = \alpha f_\sharp \mu + (1-\alpha) f_\sharp \nu$

$$\begin{tikzcd}
\wp(\Omega) \arrow[r, "\circ f^{-1}"] & \wp(E) \\
\Omega \arrow[u, "x \to \delta_x"] \arrow[r, "f"] & E \arrow[u, "e \to \delta_e"']
\end{tikzcd}$$

Когда мы будем обсуждать топологии на пространстве вероятностных мер, мы увидим, что эти два свойства характеризуют $f_\sharp$ среди непрерывных отображений $\wp(\Omega) \to \wp(E)$.

Непрерывность конечных мер

Для последовательности (или направления) (A_n) мы можем определить

$$\overline{\lim_n} A_n := \cap_{k\in\mathbb{N}} \cup_{n \geq k} A_n, \qquad \underline{\lim_n} A_n := \cup_{k\in\mathbb{N}} \cap_{n \geq k} A_n$$

Всякий раз, когда $\overline{\lim}_n A_n = \underline{\lim}_n A_n$, мы говорим, что A_n сходится, и обозначаем предел как $\lim_n A_n$. Заметим, что монотонные последовательности сходятся.

Примечание. Эквивалентно, $\overline{\lim}_n A_n$ — это множество точек $x \in \Omega$ таких, что $x \in A_n$ для бесконечного числа n. $\underline{\lim}_n A_n$ — это множество точек $x \in \Omega$ таких, что $x \notin A_n$ для конечного числа n.

Утверждение 0.3. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — конечное измеримое пространство, A_n — измеримая последовательность. Нетрудно проверить, что $\underline{\lim}_n A_n$, $\overline{\lim}_n A_n$ измеримы и*

$$\underline{\lim}_n \mu(A_n) \geq \mu(\underline{\lim}_n A_n), \qquad \overline{\lim}_n \mu(A_n) \leq \mu(\overline{\lim}_n A_n) \tag{1}$$

В частности, когда A_n сходится, $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\lim_n A_n)$.

Обозначим теперь через $A \Delta B$ симметрическую разность A и B. Рассмотрим отношение *эквивалентности* на $\mathcal{F}$, заданное как $A \sim B$, если $\mu(A \Delta B) = 0$. Легко видеть, что если $A \sim A'$ и $B \sim B'$, то $\mu(A \Delta B) = \mu(A' \Delta B')$. Таким образом, функция

$$d_\mu(A, B) := \mu(A \Delta B)$$

переходит на фактор-пространство $\mathcal{F} / \sim$, и легко видеть, что она является расстоянием, называемым μ-булевым расстоянием. Из Уравнение 1 мы видим, что $(\mathcal{F} / \sim, d_\mu)$ — **полное** метрическое пространство.

Регулярные пространства с мерой

Определение 0.12 (Регулярная мера)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство, где Ω — топологическое пространство. Мера μ на $(\Omega, \mathcal{F})$ является

- **внешне регулярной**, если для каждого $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \supset A, U \text{ открыто и измеримо}\}$$

- **внутренне регулярной**, если для каждого $A \in \mathcal{F}$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ компактно и измеримо}\}$$

- **регулярной**, если она и внешне, и внутренне регулярна. То есть для каждого $A \in \mathcal{F}$ и $\varepsilon > 0$ существуют открытое множество $U \in \mathcal{F}$ и компактное множество $K \in \mathcal{F}$ такие, что $K \subset A \subset U$ и $\mu(U \setminus K) < \varepsilon$.

Если Ω — польское пространство (сепарабельное, вполне метризуемое топологическое пространство), снабжённое своей борелевской σ-алгеброй, см. Пример 0.2, то любая конечная мера на $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ регулярна. Аналогичные утверждения верны на компактных метрических пространствах и на локально компактных хаусдорфовых пространствах со второй аксиомой счётности. В более общем смысле, любая локально конечная мера на польском пространстве регулярна. Другими словами, при умеренных предположениях на топологию Ω регулярность *всех* конечных борелевских мер имеет место.

Полные пространства с мерой

Определение 0.13 (Пренебрежимое множество)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой. Подмножество $A \subset \Omega$ называется **пренебрежимым**, если оно содержится в множестве меры 0.

Определение 0.14 (Полное пространство с мерой)**.** Пространство с мерой $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ **полно**, если любое пренебрежимое множество измеримо (и, следовательно, имеет меру 0).

Определение 0.15 (Эквивалентность почти всюду)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой. Мы говорим, что свойство выполняется **почти всюду** (μ-п.в., или просто п.в., когда мера ясна из контекста), если оно выполняется для всех $\omega \in \Omega \setminus N$, где N — μ-пренебрежимое множество.

Две измеримые функции $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ **эквивалентны почти всюду** (или μ-п.в. эквивалентны), если $f(\omega) = g(\omega)$ для μ-п.в. $\omega \in \Omega$; то есть если $\mu(\{\omega : f(\omega) \neq g(\omega)\}) = 0$. Мы часто рассматриваем п.в. эквивалентные функции как тождественные, особенно в контексте интегрирования.

Утверждение 0.4 (Пополнение пространства с мерой)**.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой. Тогда существует полное пространство с мерой $(\Omega, \overline{\mathcal{F}}, \overline{\mu})$, называемое* ***пополнением*** *$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, такое что:*

1. *$\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$.*
2. *$\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ для всех $A \in \mathcal{F}$.*
3. *Для любого $E \in \overline{\mathcal{F}}$ существуют множества $A, B \in \mathcal{F}$ такие, что $A \subset E \subset B$ и $\mu(B \setminus A) = 0$.*

Более того, пополнение единственно в следующем смысле: если $(\Omega, \mathcal{F}', \mu')$ — другое полное пространство с мерой, удовлетворяющее (1), (2) и (3), то $\mathcal{F}' = \overline{\mathcal{F}}$ и $\mu' = \overline{\mu}$.

Утверждение 0.4. Определим

$$\overline{\mathcal{F}} = \{E \cup N : E \in \mathcal{F}, N \subset A \text{ для некоторого } A \in \mathcal{F} \text{ с } \mu(A) = 0\}. \tag{2}$$

Другими словами, $\overline{\mathcal{F}}$ состоит из множеств, которые могут быть образованы взятием измеримого множества E и добавлением пренебрежимого множества. $\overline{\mathcal{F}}$ является σ-алгеброй, так как:

1. $\Omega \in \mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$.
2. Пусть $E \cup N \in \overline{\mathcal{F}}$, где $E \in \mathcal{F}$, $N \subset A$, и $\mu(A) = 0$. Тогда
$$(E \cup N)^c = E^c \cap N^c = (E^c \cap A^c) \cup (E^c \cap (A \setminus N)) \tag{3}$$
и $E^c \cap A^c \in \mathcal{F}$, в то время как $(E^c \cap (A \setminus N)) \subset A$ пренебрежимо.
3. Пусть $(E_i \cup N_i)_i$ — последовательность в $\overline{\mathcal{F}}$, где $E_i \in \mathcal{F}$, $N_i \subset A_i$, и $\mu(A_i) = 0$. Тогда $\cup_i (E_i \cup N_i) = (\cup_i E_i) \cup (\cup_i N_i)$ также находится в $\overline{\mathcal{F}}$, так как $\mu(\cup_i A_i) = 0$.

Далее определим $\overline{\mu}$ на $\overline{\mathcal{F}}$ как
$$\overline{\mu}(E \cup N) = \mu(E) \tag{4}$$
для $E \in \mathcal{F}$ и $N \subset A$ с $\mu(A) = 0$. Легко видеть, что $\overline{\mu}$ определена корректно: предположим $E_1 \cup N_1 = E_2 \cup N_2$, где $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$, $N_1 \subset A_1$, $N_2 \subset A_2$, и $\mu(A_1) = \mu(A_2) = 0$. Тогда $E_1 \subset E_2 \cup A_2$, следовательно $\mu(E_1 \setminus E_2) = 0$ и аналогично $\mu(E_2 \setminus E_1) = 0$. Таким образом

$$\mu(E_1) = \mu(E_1 \cap E_2) = \mu(E_2). \tag{5}$$

Это показывает, что $\overline{\mu}$ определена корректно. Теперь покажем, что $\overline{\mu}$ является мерой на $\overline{\mathcal{F}}$.

1. $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.
2. Пусть $(E_i \cup N_i)_i$ — последовательность попарно непересекающихся множеств в $\overline{\mathcal{F}}$. Тогда
$$\overline{\mu}\left(\cup_i (E_i \cup N_i)\right) = \mu\left(\cup_i E_i\right) = \sum_i \mu(E_i) = \sum_i \overline{\mu}(E_i \cup N_i). \tag{6}$$

   Следовательно, $\overline{\mu}$ — мера. Из построения также ясно, что она полна. Пункты (1), (2), (3) тривиальны, как и единственность.

$\square$

Меры, аппроксимируемые компактными классами

Сначала введём понятие компактного класса.

Определение 0.16 (Компактный класс)**.** Семейство $\mathcal{K}$ подмножеств множества Ω называется **компактным классом**, если для любой последовательности (K_n) элементов $\mathcal{K}$ с $\cap_n K_n = \emptyset$ существует конечное N такое, что $\bigcap_{n=1}^N K_n = \emptyset$.

Примечание. Хорошо известный факт из элементарной топологии (свойство конечных пересечений) гласит, что в хаусдорфовом топологическом пространстве семейство компактных подмножеств образует компактный класс. Отсюда и происходит название *компактный класс*.

Определение 0.17. Пусть Ω — непустое множество, $\mathcal{A}$ — семейство подмножеств Ω, μ — внешнее содержание на $(\Omega, \mathcal{A})$, а $\mathcal{K}$ — компактный класс подмножеств Ω. Мы говорим, что μ **аппроксимируется компактным классом** $\mathcal{K}$, если для любого $A \in \mathcal{A}$ и $\varepsilon > 0$ существуют $K_\varepsilon \in \mathcal{K}$, $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ такие, что $A \setminus K_\varepsilon \subset A_\varepsilon$ и $\mu(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$.

Пример 0.7. Внутренне регулярная мера на топологическом пространстве аппроксимируется семейством компактных множеств, см. Определение 0.12.

Лемма 0.1. *Внешнее содержание, аппроксимируемое (некоторым компактным классом $\mathcal{K}$), непрерывно в нуле. А именно, если $A_n \in \mathcal{A}$ — убывающая последовательность с $\cap_n A_n = \emptyset$, то $\lim_n \mu(A_n) = 0$.*

Лемма 0.1. Зафиксируем $\varepsilon > 0$, и пусть $K_n \in \mathcal{K}$ и $B_n \in \mathcal{A}$ таковы, что $K_n \subset A_n$, $A_n \setminus K_n \subset B_n$ и $\mu(B_n) \leq \varepsilon 2^{-n}$. Тогда $\cap_n K_n \subset \cap_n A_n = \emptyset$. Таким образом, для некоторого конечного N, $\cap_{n=1}^N K_n = \emptyset$. Следовательно,

$$A_N \cap (\cup_{n=1}^N B_n)^c = \cap_{n=1}^N (A_n \cap B_n^c) \subset \cap_{n=1}^N (A_n \cap (A_n^c \cup K_n)) \subset \cap_{n=1}^N K_n = \emptyset$$

А именно, $A_N \subset \cup_{n=1}^N B_n$, и так как μ — внешнее содержание,

$$\mu(A_N) \leq \sum_{n=1}^N \mu(B_n) \leq \varepsilon$$

□

Теоремы о продолжении

В этом разделе мы кратко опишем некоторые результаты, которые позволяют легко определять меры на пространстве, задавая их значения лишь на определённом классе множеств. Рассмотрим следующие задачи.

- Мы хотим определить меру на $\mathbb{R}$. Наиболее интуитивный подход состоял бы в определении её значения на интервалах, таких как $(a, b]$ (для σ-конечных мер) или $(-\infty, a]$ (для конечных мер, поскольку мера этого интервала может быть тождественно равна ∞ для не конечных мер). Будет ли этих значений "достаточно", чтобы охарактеризовать меру на всей σ-алгебре, которую они порождают? Теорема Каратеодори о продолжении Теорема 0.4 даёт (положительный) ответ на этот вопрос.

- Мы хотим определить меру на функциях, скажем, на пространстве $E^{\mathbb{N}} = \{X : \mathbb{N} \to E\}$. Конечно, нам нужно знать меру множеств вида $\{X \in E^{\mathbb{N}} : (X_1 \in A_1, X_2 \in A_2, \dots, X_n \in A_n)\}$. Поскольку эти множества характеризуются конечным числом условий $X_i \in A_i$, во многих случаях их мера может быть описана явно. Если мы знаем меру на множествах такого вида, можем ли мы продолжить её до меры на всей σ-алгебре-произведении на $E^{\mathbb{N}}$? Теорема Колмогорова о продолжении Теорема 0.5 даёт (положительный при умеренных условиях) ответ на этот вопрос.

Теорема Каратеодори о продолжении

Основные идеи Глава

Чтобы определить меру μ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$, достаточно определить:

- Квазиполукольцо $\mathcal{S}$, порождающее σ-алгебру $\mathcal{F}$.
- Содержание μ_0 на $\mathcal{S}$, которое задаёт значение μ на квазиполукольце.
- Компактный класс $\mathcal{K}$ на Ω, который аппроксимирует μ_0 на $\mathcal{S}$.

Более того, если μ_0 σ-конечно на $\mathcal{S}$, то мера μ на $(\Omega, \mathcal{F})$, совпадающая с μ_0 на $\mathcal{S}$, единственна.
Примеры: $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{F}$ — борелевская σ-алгебра, $\mathcal{S}$ — семейство интервалов $(a, b]$, $\mathcal{K}$ — класс компактных множеств (или просто компактных интервалов).

Определение 0.18 (Квазиполукольцо)**. Квазиполукольцо** множеств $\mathcal{S}$ на множестве Ω — это семейство подмножеств Ω, удовлетворяющее:

1. $\emptyset \in \mathcal{S}$.
2. Если $A, B \in \mathcal{S}$, то и $A \cap B$, и $A \cap B^c$ являются конечными дизъюнктными объединениями элементов из $\mathcal{S}$. А именно, существуют *попарно непересекающиеся* множества $B_1, \dots, B_n$ и *попарно непересекающиеся* множества $C_1, \dots, C_m \in \mathcal{S}$ такие, что $A \cap B = \cup_i B_i$, $A \cap B^c = \cup_j C_j$.

Теорема 0.4 (Теорема Каратеодори о продолжении)**.** *Пусть $\mathcal{S}$ — квазиполукольцо подмножеств Ω, и пусть $\mu_0 : \mathcal{S} \to [0, \infty]$ — σ-аддитивное содержание, см. Определение 0.11. Тогда существует мера μ (называемая* продолжением *μ_0) на $\sigma(\mathcal{S})$ такая, что $\mu(A) = \mu_0(A)$ для всех $A \in \mathcal{S}$. Если μ_0 σ-конечна, то продолжение единственно.*

Теорема 0.4. Приведём набросок доказательства, которое можно найти в (Patriota 2011 г.).

1. **Внешнее содержание.** Для любого $E \subset \Omega$ определим *внешнее содержание*
$$\mu^*(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu_0(A_i) \mid A_i \in \mathcal{S}, E \subset \cup_{i=1}^{\infty} A_i \right\}. \tag{7}$$
где инфимум по пустому множеству считается равным $+\infty$. Легко видеть, что $\mu^*(\emptyset) = 0$, и что μ^* монотонна, а именно $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, если $A \subset B$. Далее покажем, что $\mu^*(E) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(E_n)$ (субаддитивность). Пусть $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Без ограничения общности предположим, что $\mu^*(E_n) < \infty$ для всех n. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Для каждого n существует последовательность $(A_{n,i})_{i \in \mathbb{N}}$ в $\mathcal{S}$ такая, что $E_n \subset \cup_i A_{n,i}$ и $\sum_i \mu_0(A_{n,i}) < \mu^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon$. Тогда $E \subset \cup_n \cup_i A_{n,i}$, так что
$$\mu^*(E) \leq \sum_n \sum_i \mu_0(A_{n,i}) < \sum_n (\mu^*(E_n) + 2^{-n-1}\varepsilon) = \sum_n \mu^*(E_n) + \varepsilon \tag{8}$$

2. **σ-алгебра $\mathcal{F}^*$.** Определим семейство множеств

$$\mathcal{F}^* := \{E \subset \Omega : \mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c), \forall A \subset \Omega\} \tag{9}$$

   Поскольку μ^* субаддитивна, в последней формуле равенство можно эквивалентно заменить на $\mu^*(A) \geq \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$. Тогда элементарно проверяется, что $\mathcal{F}^*$ — это σ-алгебра.

3. **$\mathcal{F}^* \supset \mathcal{S}$.** Сначала заметим, что в Уравнение 9 покрытие A_i можно считать состоящим из непересекающихся множеств. Учитывая это, можно доказать, что $\mu^*(A) = \mu^*(A \cap E) + \mu^*(A \cap E^c)$ для всех $A \in \Omega$ и $E \in \mathcal{S}$.

4. **μ^*, ограниченная на $\mathcal{F}^*$, является мерой.** Мы опускаем доказательство этой длинной, но элементарной проверки.

5. **Существование продолжения.** Поскольку μ^* — мера на σ-алгебре $\mathcal{F}^*$, содержащей $\mathcal{S}$, она индуцирует меру на $\sigma(\mathcal{S})$. Нам нужно показать, что $\mu^*(S) = \mu_0(S)$ для всех $S \in \mathcal{S}$. Очевидно, $\mu^*(S) \leq \mu_0(S)$ по определению, а доказательство обратного неравенства, хотя и элементарное, но длинное, мы опускаем.

6. **Единственность продолжения.** Предположим, что μ_0 σ-конечна, с $\Omega = \cup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, $\Omega_n \in \mathcal{S}$ — возрастающая последовательность, и $0 < \mu_0(\Omega_n) < \infty$. Пусть μ и ν — два продолжения μ_0 на $\sigma(\mathcal{S})$. Поскольку $\mathcal{S}$ — qπ-система, μ и ν совпадают на Ω_n, а именно $\mu(A \cap \Omega_n) = \nu(A \cap \Omega_n)$ для $A \in \sigma(\mathcal{S})$ в силу Теорема 0.1. Так как мы предположили, что Ω_n монотонна, равенство выводится переходом к пределу по n.

□

Примечание. Стоит отметить, что для единственности продолжения необходимо, чтобы μ_0 была σ-конечной. Недостаточно (для единственности), чтобы продолжение μ_0 было \$⊠-конечным.

Утверждение 0.5. *Если содержание μ на квазиполукольце $\mathcal{S}$ аппроксимируется компактным классом, то оно σ-аддитивно.*

Утверждение 0.5. Предположим, что $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$, $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{S}$ — два попарно непересекающихся семейства элементов из $\mathcal{S}$ таких, что $A := \cup_i A_i = \cup_j B_j$. Тогда $C_{i,j} := A_i \cap B_j$ можно записать как дизъюнктное объединение $K_{i,j}$ элементов $C_{i,j,k}$ из $\mathcal{S}$. Следовательно, так как μ аддитивно

$$\sum_i \mu(A_i) = \sum_{i,j} \sum_k \mu(C_{i,j,k}) = \sum_j \mu(B_j) := \mu(A)$$

Это позволяет нам корректно продолжить $\mu(\cdot)$ до содержания на семействе $\mathcal{S}^u$ дизъюнктных объединений элементов из $\mathcal{S}$. Мы можем определить внешнее содержание μ^* на семействе $\mathcal{S}^*$ конечных (возможно, не дизъюнктных) объединений элементов из $\mathcal{S}$, как в Уравнение 7. Мы уже отмечали в доказательстве Теорема 0.4, что в Уравнение 7 мы можем ограничиться попарно непересекающимися A_i, см. (Patriota 2011 г., Proposition 1.1), следовательно $\mu^*(A) = \mu(A)$ для $A \in \mathcal{S}^u$.

Легко проверить, что μ^* на $\mathcal{S}^*$ может быть аппроксимировано компактным классом (см. (Bogachev 2007 г. Proposition 1.12.4)). Из Лемма 0.1 следует, что μ^* непрерывно в нуле на $\mathcal{S}^u$.

Пусть теперь $A_i \in \mathcal{S}$ — попарно непересекающаяся последовательность такая, что $\cup_i A_i =: A \in \mathcal{S}$. Тогда $\cup_{i>n} A_i = A \cap (\cup_{i \leq n} A_i)^c$, и каждое $A \cap A_i^c$ находится в $\mathcal{S}^u$, поскольку $\mathcal{S}$ — квазиполукольцо. Следовательно, $\cup_{i>n} A_i \in \mathcal{S}^u$ и

$$\mu(A) = \sum_{i \leq n} \mu(A_i) + \mu(\cup_{i>n} A_i).$$

Так как $\mu(\cup_{i>n} A_i) = \mu^*(\cup_{i>n} A_i) \to 0$ при $n \to \infty$, мы получаем σ-аддитивность. □

Пример 0.8 (Мера Лебега)**.** На $\Omega = \mathbb{R}$ рассмотрим полукольцо A интервалов $[a, b)$ и содержание $\hat{\lambda}([a, b)) = b - a$. Тогда $\hat{\lambda}$ аппроксимируется компактным классом конечных замкнутых интервалов, следовательно, оно σ-аддитивно на A по Утверждение 0.5. По Теорема 0.4, $\hat{\lambda}$ единственным образом продолжается до σ-аддитивной меры λ_{Borel} на борелевской σ-алгебре $\mathbb{R}$. Вспоминая Утверждение 0.4, пополнение борелевской σ-алгебры по отношению к λ_{Borel} называется лебеговской σ-алгеброй; пополнение λ меры λ_{Borel} называется мерой Лебега.

Теорема Колмогорова о продолжении

> Основные идеи Глава
>
> Если мы хотим определить вероятностную меру на пространстве функций или сечений, достаточно определить её конечномерные проекции, при условии, что эти проекции достаточно регулярны (аппроксимируются компактным классом). Это минимальное требование, которое всегда выполняется на разумных топологических пространствах, таких как польские пространства.

Теорема Колмогорова о продолжении предоставляет условия для существования вероятностной меры на бесконечном произведении пространств при наличии согласованного семейства мер на конечномерных проекциях.

Теорема 0.5 (Теорема Колмогорова о продолжении)**.** *Пусть T — произвольное индексное множество. Для каждого $t \in T$ пусть $(\Omega_t, \mathcal{F}_t)$ — измеримое пространство. Для $J \subset T$ определим пространство-произведение*

$$\Omega_J := \prod_{t \in J} \Omega_t \tag{10}$$

и пусть $\mathcal{F}_J$ — σ-алгебра-произведение на Ω_J, см. Определение 0.9. Для подмножеств $I \subset J \subset T$ пусть $\pi^J_I : \Omega_J \to \Omega_I$ обозначает каноническое проекционное отображение.

Предположим, что для каждого конечного подмножества $J \Subset T$ нам дана аппроксимируемая компактным классом (см. Определение 0.17) вероятностная мера μ_J на $(\Omega_J, \mathcal{F}_J)$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- *Выполняется **условие согласованности**, а именно, для любых конечных подмножеств $I \subset J \Subset T$*

$$\mu_I = (\pi^J_I)_* \mu_J, \tag{11}$$

  где $(\pi^J_I)_* \mu_J$ — это образ меры, определённый как $((\pi^J_I)_* \mu_J)(A) = \mu_J((\pi^J_I)^{-1}(A))$ для $A \in \mathcal{F}_I$.
- *Существует (обязательно единственная) вероятностная мера μ на пространстве-произведении $\Omega_T := \prod_{t \in T} \Omega_t$ такая, что*

$$\mu_J = (\pi^T_J)_* \mu \tag{12}$$

  для всех конечных подмножеств $J \Subset T$.

Примечание 0.1. Условие согласованности очевидно необходимо для существования меры μ на Ω_T, удовлетворяющей Уравнение 12. Действительно, её образы $(\mu_F)_{F \Subset T}$, определённые каноническими проекциями, тривиально удовлетворяют Уравнение 11, так как $\pi^J_I \circ \pi^T_J = \pi^T_I$ и, следовательно,

$$\mu_I := \mu \circ (\pi^T_I)^{-1} = \mu \circ (\pi^T_J)^{-1} \circ (\pi^J_I)^{-1} = \mu_J \circ (\pi^J_I)^{-1} \tag{13}$$

Теорема, таким образом, утверждает, что условие аппроксимации компактным классом влечёт обратную импликацию.

Теорема 0.5. Пусть $\mathcal{R}$ — полукольцо подмножеств Ω_T вида

$$\prod_{t\in J} A_t \times \prod_{t\in T\setminus J} \Omega_t$$

для любого конечного $J \Subset T$ и $(A_t \in \mathcal{F}_t)_{t\in J}$. Определим функцию множеств μ на $\mathcal{R}$ как $\mu(C_B^J) = \mu_J(B)$. Условие согласованности гарантирует, что μ определена корректно и что μ является содержанием, см. Определение 0.11, на $\mathcal{R}$.

Пусть $\mathcal{K}$ — семейство подмножеств Ω_T вида

$$\prod_{t\in J} K_t \times \prod_{t\in T\setminus J} \Omega_t$$

для любого конечного $J \Subset T$ и $(K_t \in \mathcal{K}_t)_{t\in J}$. Легко видеть, что $\mathcal{K}$ является компактным классом, см. Определение 0.16. Более того, μ аппроксимируется классом $\mathcal{K}$ на $\mathcal{R}$. По Лемма 0.1, μ непрерывна в нуле на $\mathcal{R}$. Это, в свою очередь, влечёт, что μ σ-аддитивна ввиду Утверждение 0.5. Поскольку $\mathcal{R}$ является полукольцом и, следовательно, квазиполукольцом, мы завершаем доказательство, применяя Теорема 0.4. □

Интегрирование и пространства Лебега

> Основные идеи Глава
>
> Интегралы в теории меры предоставляют общее определение, которое включает в себя суммы, ряды, классические интегралы Римана, математические ожидания случайных величин и многое другое. Он ведёт себя так, как и следовало ожидать, то есть как элементарные суммы (например, он линеен, монотонен). Однако точная математическая характеристика позволяет нам быть очень точными в вопросах сходимости, см. Теорема 0.12.

Интеграл в теории меры

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}), \mu$ — пространство с мерой, и пусть $f\colon \Omega \to [0,\infty)$. Если $f = \sum_j a_j 1_{A_j}$ принимает конечное число значений $a_1, \dots, a_n$ на измеримых множествах $A_1, \dots, A_n$ соответственно, то f называется **простой** или **дискретной**. для таких функций мы полагаем

$$\mu(f) \equiv \int f d\mu := \sum_j a_j \mu(A_j)$$

Легко видеть, что $\mu(f)$ зависит от f, а не от значений (a_j) и измеримых множеств (A_j), используемых для её представления в виде суммы.

Для любой (не обязательно простой) функции $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ у нас есть два разумных определения для **интеграла от f по мере μ**:

$$\mu(f) \equiv \int_\Omega f(x)\, d\mu(x) := \sup\{\mu(g) \;:\; g \le f, g \text{ простая}\} \tag{14}$$

$$\mu(f) \equiv \int_\Omega f(x)\, d\mu(x) := \inf\{\mu(g) \;:\; g \ge f, g \text{ простая}\} \tag{15}$$

Определение 0.19 (Интеграл)**.** Если $f\colon \Omega \to [0,\infty]$ *измерима*, правые части Уравнение 14 и Уравнение 15 совпадают (что легко проверить), и величина $\mu(f)$ называется **интегралом от f по мере μ**.

Если $f = f^+ - f^-$ не обязательно положительна, то полагают $\mu(f) = \mu(f^+) - \mu(f^-)$, при условии что оба интеграла не равны $+\infty$ одновременно.

Если $\mu(|f|) < \infty$, f называется **μ-интегрируемой**, или просто **интегрируемой**, если мера μ ясна из контекста.

Непосредственно проверяется, что интеграл является

- **линейным**: $\mu(\alpha f + g) = \alpha\mu(f) + \mu(g)$.
- **монотонным**: если $f \geq g$, то $\mu(f) \geq \mu(g)$.
- **совместимым** с отношением эквивалентности μ-п.в.: если $f = g$ μ-п.в., то $\mu(f) = \mu(g)$.

Обозначение $\mu(f)$ особенно полезно, чтобы подчеркнуть линейность операции, так как в некоторых контекстах меры и функции находятся в двойственности. Заметим, что интеграл может принимать значение $+\infty$, даже если f конечна.

Пример 0.9. Если Ω — счётное пространство, наделённое дискретной σ-алгеброй (или, в более общем случае, если измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ имеет не более чем счётное число атомов), то интеграл записывается в виде (возможно, конечной, но не более чем счётной) суммы

$$\mu(f) := \sum_{x\in\Omega} f(x)\mu(\{x\})$$

Пример 0.10. Если $\Omega = \mathbb{R}$, μ — мера Лебега, а f — интегрируема по Риману, то $\mu(f) = \int f(x)dx$ совпадает с классическим интегралом Римана.

Теорема 0.6 (Теорема Фубини)**.** *Пусть $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mu_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, \mu_2)$ — два σ-конечных пространства с мерой, и пусть $(\Omega_1\times\Omega_2, \mathcal{F}_1\otimes\mathcal{F}_2, \mu_1\otimes\mu_2)$ — пространство с мерой-произведением. Пусть $f\colon \Omega_1\times\Omega_2 \to \mathbb{R}$ — измеримая функция.*

Если f интегрируема, $\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|\, d(\mu_1\otimes\mu_2) < \infty$, то повторные интегралы равны интегралу по произведению пространств:

$$\int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f(x,y)\, d\mu_2(y)\right) d\mu_1(x) = \int_{\Omega_2}\left(\int_{\Omega_1} f(x,y)\, d\mu_1(x)\right) d\mu_2(y) = \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f(x,y)\, d(\mu_1\otimes\mu_2)(x,y)$$

Пространства Лебега

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой. Для $p \in (0,\infty]$ фактор-пространство (здесь $\sim$ обозначает эквивалентность п.в. Определение 0.15)

$$L^p(\Omega,\mathcal{F},\mu) := \left\{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ измерима } : \int |f|^p d\mu < \infty\right\}/\sim, \qquad p<\infty$$
$$L^\infty(\Omega,\mathcal{F},\mu) := \{f\colon \Omega \to \mathbb{R} \text{ измерима } : \exists C>0 : |f| \leq C\ \mu\text{-п.в.}\}/\sim, \qquad p=\infty$$

называется пространством Лебега с показателем p.

Утверждение 0.6. *Для $p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ является банаховым пространством, если его снабдить нормой*

$$\|f\|_{L^p} := \left(\int |f|^p d\mu \right)^{1/p}, \qquad p < \infty$$
$$\|f\|_{L^\infty} := \inf \{ C \geq 0 \,:\, |f| \leq C \text{ } \mu\text{-п.в.} \}, \qquad p = \infty$$

Более того, если $\mu(\Omega) < \infty$, то $\|f\|_{L^\infty} = \lim_{p \to \infty} \|f\|_{L^p}$.

Разложение мер

Основные идеи Глава

Если μ — некоторая базовая мера на измеримом пространстве, мы можем разложить любую другую меру следующим образом:

$$\nu = \varrho \, \mu + \nu^s$$

где ν^s сингулярна по отношению к μ, другими словами, ν^s имеет вес только на множествах μ-меры 0. В то время как $\varrho\mu$ следует понимать как в Уравнение 16.

Определение 0.20 (Абсолютно непрерывные и сингулярные меры)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Мера ν называется **абсолютно непрерывной** относительно меры μ (обозначается $\nu \ll \mu$), если для любого $A \in \mathcal{F}$ из $\mu(A) = 0$ следует $\nu(A) = 0$. Если $\nu \ll \mu$ и $\mu \ll \nu$, то есть если у них одинаковые множества меры 0, они называются **эквивалентными**.

С другой стороны, μ и ν **взаимно сингулярны** (обозначается $\mu \perp \nu$), если существует множество $A \in \mathcal{F}$ такое, что $\mu(A) = 0$ и $\nu(A^c) = 0$.

Примечание. На $\mathbb{R}$ с борелевской σ-алгеброй мера ν абсолютно непрерывна относительно меры Лебега μ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любого конечного набора непересекающихся интервалов (a_i, b_i) с $\sum_i (b_i - a_i) < \delta$ выполняется $\sum_i \nu((a_i, b_i)) < \varepsilon$. Это соответствует элементарному понятию абсолютной непрерывности для функций.

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — σ-конечное пространство с мерой, а $\varrho \colon \Omega \to [0, \infty]$ — измеримая функция, тогда функция

$$\nu(A) := \int_A \varrho \, d\mu, \quad A \in \mathcal{F} \tag{16}$$

является мерой на $(\Omega, \mathcal{F})$, что легко проверить, используя теорему о монотонной сходимости Теорема 0.10. Она удовлетворяет

$$\int f d\nu = \int f \varrho d\mu \quad f \geq 0, \text{ измерима} \tag{17}$$

Эта мера обозначается $\nu = \varrho\mu$ или, ввиду Уравнение 17, также используется обозначение $d\nu = \varrho d\mu$.

Теорема 0.7 (Производная Радона–Никодима)**.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — σ-конечное пространство с мерой, а ν — другая мера на $(\Omega, \mathcal{F})$. Следующие утверждения эквивалентны:*

- *ν абсолютно непрерывна относительно μ, $\nu \ll \mu$.*
- *Существует измеримая функция $\varrho \colon \Omega \to [0, \infty]$ такая, что $\nu = \varrho\mu$, а именно, выполняется Уравнение 16.*

Функция ϱ называется ***производной Радона–Никодима*** *меры ν по мере μ, обозначается $\frac{d\nu}{d\mu}$ и единственна с точностью до μ-п.в. эквивалентности.*

Более того, если выполняется любое из двух эквивалентных условий выше*, следующие утверждения также эквивалентны:*

- *ϱ конечна, то есть принимает значения в $[0, \infty)$ (с точностью до её определения на μ-пренебрежимом множестве).*
- *ν является σ-конечной.*

Наконец, для σ-конечных мер $\nu \ll \mu \ll \lambda$ выполняется ***цепное правило****:*

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = \frac{d\nu}{d\mu}\frac{d\mu}{d\lambda} \tag{18}$$

Теорема 0.7. Приведём краткий набросок доказательства, заинтересованного читателя отсылаем к (Bogachev 2007 г., 3.2; Conway 2012 г., строка 113). Если $\nu = \varrho\mu$, то, безусловно, $\nu(A) = 0$, когда $\mu(A) = 0$. Так что нам нужно доказать только то, что если $\nu \ll \mu$, то существует ϱ такая, что $\nu = \varrho\mu$. Мы также можем ограничиться случаем, когда μ конечна, так как можно доказать теорему для ограничения μ на множества конечной меры и получить σ-конечный случай как непосредственное следствие. Для простоты мы также ограничимся случаем конечной меры ν.

Рассмотрим множество $\mathcal{E} := \{f \in L^0(\Omega, \mu) : f\mu \leq \nu\}$ и определим

$$\varrho(x) = \sup_{f \in \mathcal{E}} f(x)$$

$\mathcal{E}$ непусто, так как нулевая функция принадлежит $\mathcal{E}$. Более того, если $f_1, f_2 \in \mathcal{E}$, то $\max(f_1, f_2) \in \mathcal{E}$. Отсюда можно вывести, что $\varrho \in \mathcal{E}$. Поэтому остаётся только проверить, что $\varrho\mu(A) \geq \nu(A)$ для всех $A \in \mathcal{F}$, чтобы завершить доказательство. □

Теорема 0.8 (Теорема Лебега о разложении). *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — σ-конечное пространство с мерой, а ν — другая σ-конечная мера на $(\Omega, \mathcal{F})$. Тогда существует единственное разложение $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, где ν_{ac} и ν_s — σ-конечные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$ такие, что $\nu_{ac} \ll \mu$ (абсолютно непрерывная) и $\nu_s \perp \mu$ (сингулярная).*

Теорема 0.8. Поскольку ν и μ σ-конечны, то и $\nu+\mu$ тоже. Более того, $\mu \ll \nu+\mu$. По теореме Радона–Никодима существует измеримая функция ϱ такая, что

$$\mu(A) = \int_A \varrho\, d(\nu + \mu), \qquad \forall A \in \mathcal{F} \tag{19}$$

Пусть $B = \{\omega : \varrho(\omega) = 0\}$, и определим ν_{ac} и ν_s как

$$\nu_{ac}(A) = \nu(A \cap B^c), \qquad \nu_s(A) = \nu(A \cap B), \qquad \forall A \in \mathcal{F} \tag{20}$$

Очевидно, $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, и $\nu_s(B^c) = 0$, а $\mu(B) = 0$. То есть ν_s и μ сингулярны.

Пусть теперь A таково, что $\mu(A) = 0$. Тогда

$$0 = \mu(A \cap B^c) = \int_{A \cap B^c} \varrho d(\nu + \mu) \geq \int_{A \cap B^c} \varrho d\nu$$

Поскольку $\varrho > 0$ на B^c, необходимо $\nu(A \cap B^c) = 0$. А именно, $\nu_{ac} \ll \mu$.

Чтобы доказать единственность, предположим, что $\nu = \nu'_{ac}+\nu'_s$ — другое такое разложение. Тогда $\nu_{ac}-\nu'_{ac} = \nu'_s - \nu_s$. Левая часть абсолютно непрерывна по отношению к μ, в то время как правая часть сингулярна по отношению к μ. Единственная мера, которая одновременно абсолютно непрерывна и сингулярна по отношению к μ, — это нулевая мера. □

Результаты о сходимости

Рассмотрение σ-аддитивных мер является сильным ограничением по сравнению с просто аддитивными мерами. Причина развития такой теории заключается в мощных результатах о сходимости, которые из неё следуют.

Определение 0.21 (Сходимость измеримых функций)**.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой, а (E, d) — метрическое пространство (наделённое своей борелевской σ-алгеброй). Последовательность (или направление) (f_n) измеримых функций $f_n\colon \Omega \to E$ сходится к f

- μ-**п.в.** если $f_n(x) \to f(x)$ вне множества меры 0. А именно,
$$\mu\left(\{x \in \Omega \,:\, \overline{\lim_n}\, d(f_n(x), f(x)) \neq 0\}\right) = 0$$
- **по** μ**-мере**, если для каждого $\varepsilon > 0$
$$\lim_n \mu\left(\{x \in \Omega \,:\, d(f_n(x), f(x)) > \varepsilon\}\right) = 0$$
- **в** $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, если
$$\lim_n \int d(f_n(x), f(x))^p d\mu(x) = 0$$

Теорема 0.9. *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$, (E, d), f_n, f как в Определение 0.21. Верны следующие утверждения:*

- *Если $f_n \to f$ μ-п.в., то $f_n \to f$ по мере.*
- *Если $f_n \to f$ в L^p, то $f_n \to f$ по мере.*
- *Если $f_n \to f$ по мере, то существует подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится к f μ-п.в.*
- *Если $f_n \to f$ в L^p, то существует подпоследовательность f_{n_k}, которая сходится к f μ-п.в.*

Теорема 0.10 (Теорема о монотонной сходимости)**.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой. Если $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность неотрицательных измеримых функций такая, что $f_n(\omega) \uparrow f(\omega)$ для μ-п.в. $\omega \in \Omega$, то $\int f_n\, d\mu \uparrow \int f\, d\mu$.*

Теорема 0.11 (Теорема о мажорируемой сходимости)**.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с мерой. Если $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность измеримых функций такая, что $f_n(\omega) \to f(\omega)$ для μ-п.в. $\omega \in \Omega$, и существует интегрируемая функция g (т.е. $\int |g|\, d\mu < \infty$) такая, что $|f_n(\omega)| \le g(\omega)$ для всех n и μ-п.в. ω, то $\int f_n\, d\mu \to \int f\, d\mu$.*

Теорема 0.12 (Теорема сходимости Витали (конечная мера))**.** *Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ — пространство с конечной мерой, и пусть $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций в $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ для $1 \le p < \infty$. Тогда f_n сходится к f в $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ т. и т. т., когда:*

- *Последовательность (f_n) сходится к f по мере.*
- *Последовательность $(|f_n|^p)$ равномерно интегрируема:*
$$\lim_{M\to\infty} \sup_n \int_{|f_n|\ge M} |f_n|^p d\mu = 0$$

Теорема 0.13 (Теорема сходимости Витали (общая мера)). *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *— пространство с мерой, и пусть* $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *— последовательность функций в* $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *для* $1 \leq p < \infty$. *Тогда* f_n *сходится к* f *в* $L^p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *т. и т. т., когда:*

- *Последовательность* (f_n) *сходится к* f *по мере.*
- *Функции* $(|f_n|^p)$ *равномерно интегрируемы.*
- *Для каждого* $\varepsilon > 0$ *существует множество* E *конечной меры такое, что* $\int_{E^c} |f_n|^p < \varepsilon$ *для всех* n.

Теорема 0.14 (Лемма Бореля–Кантелли). *Пусть* $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ *— пространство с мерой, и пусть* (A_n) *— последовательность измеримых множеств. Если* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, *то мера верхнего предела этих множеств равна нулю:*

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n\right) = 0.$$

Это означает, что множество точек, принадлежащих бесконечному числу множеств A_n, *имеет меру ноль.*

Bogachev, Vladimir I. 2007 г. *Measure theory*. Springer.

Conway, J. B. 2012 г. *A Course in Abstract Analysis*. Graduate studies в mathematics. American Mathematical Society.

Patriota, Alexandre Galvao. 2011 г. «An extended version of the Caratheodory extension Theorem». https://api.semanticscholar.org/CorpusID:211837752.