

Мартингалы

Мы кратко напомним некоторые основные свойства и неравенства, касающиеся мартингалов.

Определения

Определение 0.1 (Пространство с фильтрацией). Пусть Θ — частично упорядоченное множество, а (Ω, \mathcal{F}) — измеримое пространство.

Фильтрация на Ω , индексированная по Θ , — это возрастающее семейство $(\mathcal{F}_t)_{t \in \Theta}$ под- σ -алгебр \mathcal{F} . А именно, для любых $s, t \in \Theta$ с $s \leq t$ выполняется $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Фильтрация является **сепарабельной**¹, если существует счётное множество $\Theta' \subset \Theta$ такое, что $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s \in \Theta', s > t} \mathcal{F}_s$ для всех $t \in \Theta$.

Тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \in \Theta})$ в таком случае называется **пространством с фильтрацией**.

Если \mathbb{P} — вероятность на (Ω, \mathcal{F}) , то $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \Theta}, \mathbb{P})$ называется **вероятностным пространством с фильтрацией**. Оно является **полным вероятностным пространством с фильтрацией**, если $(\Omega, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ **полно** для каждого $t \in \Theta$.

Определение 0.2. Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \Theta})$ — пространство с фильтрацией, S — измеримое пространство, а $\mathbf{X} = (X_t)_{t \in \Theta}$ — семейство измеримых отображений $X_t: \Omega \rightarrow S$. \mathbf{X} **согласован** с \mathcal{F}_t , если X_t является \mathcal{F}_t -измеримым для $t \in \Theta$. **Естественная фильтрация** $\mathcal{F}_t^{\mathbf{X}}$ процесса \mathbf{X} — это слабейшая фильтрация, с которой \mathbf{X} согласован.

Определение 0.3 (Мартингал). Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \in \Theta})$ — пространство с фильтрацией, и для $t \in \Theta$ пусть M_t — вещественнозначная случайная величина $M_t: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ с $M_t \in L^1(\mathbb{P})$, а именно $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$, для $t \in \Theta$.

Для вероятности \mathbb{P} на (Ω, \mathcal{F}) , $\mathbf{M} = (M_t)_{t \in \Theta}$ является

- **\mathbb{P} -субмартингалом**, если $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \geq M_s$ для $s, t \in \Theta$ с $s \leq t$.
- **\mathbb{P} -супермартингалом**, если $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \leq M_s$ для $s, t \in \Theta$ с $s \leq t$.
- **\mathbb{P} -мартингалом**, если он является одновременно и супермартингалом, и субмартингалом, а именно, если $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ для $s, t \in \Theta$.

Если \mathbb{P} ясно из контекста, то оно обычно опускается в обозначениях, например, \mathbb{P} -мартингал в этом случае называется просто мартингалом.

¹Когда Θ — вполне упорядоченное, сепарабельное пространство, в частности, когда $\Theta \subset \mathbb{R}$, сепарабельная фильтрация также называется **непрерывной справа**. Действительно, в этом случае обычно вводится пополненная справа фильтрация

$$\mathcal{F}_t^+ := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s$$

и сепарабельность эквивалентна $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^+$.

Пример 0.1. Пусть $(X_i)_{i \geq 1}$ — последовательность независимых вещественнозначных интегрируемых случайных величин, а $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \dots, X_n)$ — наименьшая σ -алгебра, относительно которой (X_1, \dots, X_n) измеримы.

Тогда $M_n := \sum_{i=1}^n X_i$ является субмартиנגалом т. и т. т., когда $\mathbb{E}[X_i] \geq 0$ для всех $i \geq 1$, супермартингалом т. и т. т., когда $\mathbb{E}[X_i] \leq 0$ для всех i . И, следовательно, мартингалом т. и т. т., когда $\mathbb{E}[X_i] = 0$ для всех i . Действительно, для $k < n$, используя независимость

$$\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_k] = \mathbb{E}[M_k + (X_{k+1} + \dots + X_n) | (X_1, \dots, X_k)] = M_k + \sum_{i=k+1}^n \mathbb{E}[X_i]$$

Так, например, если математические ожидания неотрицательны, M_n является субмартингалом. С другой стороны, если M_n — субмартингал, то необходимо, чтобы $\mathbb{E}[X_n] \geq 0$ для всех $n \geq 1$, что следует из рассмотрения $k = n - 1$ выше.

Примечание 0.1. $M_t \in L^1(\mathbb{P})$ является мартингалом относительно данной фильтрации тогда и только тогда, когда он является мартингалом относительно своей естественной фильтрации, а именно, т. и т. т., когда $\mathbb{E}[M_t | (M_r)_{r \leq s}] = M_s$ для $s \leq t$.

Примечание 0.2. Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — выпуклая (вогнутая) функция, а M_t — субмартингал (супермартингал), то $f(M_t)$ является субмартингалом (супермартингалом), при условии что $f(M_t) \in L^1(\mathbb{P})$. Это является следствием [неравенства Йенсена](#). В частности, линейные комбинации мартингалов являются мартингалами.

Примечание 0.3. Если $\Theta = \mathbb{N}$ (или любое другое счётное множество), фильтрация автоматически сепарабельна, и мартингал (суб/супермартингал) (M_n) в этом случае называется **дискретным** мартингалом (суб/супермартингалом).

Примечание 0.4. Если $\Theta = [0, \infty)$ (или какой-либо другой вещественный интервал), фильтрация сепарабельна т. и т. т., когда

$$\mathcal{F}_s = \mathcal{F}_s^+ := \bigcap_{t > s} \mathcal{F}_t$$

поскольку мы всегда можем взять пересечение по рациональным числам. В этом случае фильтрация обычно называется непрерывной справа. Мартингал (суб/супермартингал) $(M_t)_{t \geq 0}$ в этом случае называется **мартингалом с непрерывным временем** (суб/супермартингалом).

Если (M_n) — дискретный мартингал (суб/супермартингал) на дискретном пространстве с фильтрацией $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}, \mathbb{P})$, мы можем определить для $t \in [n, n + 1)$:

$$\mathcal{F}_t := \mathcal{F}_n \quad M_t := M_n$$

чтобы получить мартингал (суб/супермартингал) с непрерывным временем. Таким образом, теория мартингалов с непрерывным временем фактически охватывает теорию дискретных мартингалов.

Мартингалы с непрерывным временем и моменты остановки

Теорема сходимости Дуба

Для вещественного числа $a \in \mathbb{R}$ мы используем обозначения $a^+ := \max(x, 0)$, $a^- := \max(-a, 0)$, так что $a = a^+ - a^-$ и $|a| = a^+ + a^-$. Для $\mathbf{X} := (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ мы также записываем

$$X_{t^+} := \lim_{s \downarrow t} X_s, \quad X_{t^-} := \lim_{s \uparrow t} X_s$$

и мы определяем случайные множества²

$$I^+ \equiv I_+(\mathbf{X}) := \{t \in \mathbb{R} : X_t = X_{t^+}\}, \quad I_- \equiv I^-(\mathbf{X}) := \{t \in \mathbb{R} : X_t = X_{t^-}\}$$

Теорема 0.1. Пусть $\mathbf{X} := (X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ — супермартингал с непрерывным временем такой, что

$$\overline{\lim}_t \mathbb{E}[X_t^-] < \infty \tag{1}$$

Тогда X_t имеет левые и правые пределы с вероятностью 1:

$$\mathbb{P}(X_{t^+}, X_{t^-} \text{ существуют для всех } t) = 1$$

Более того, существует случайная величина $X \in L^1(\Omega)$ такая, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty, t \in I_+ \cup I_-} X_t = X \text{ с вероятностью } 1$$

В частности, при Уравнение 1, супермартингал, непрерывный справа (или слева), имеет предел с вероятностью 1.

²точно, в обозначении $X_t = X_{t^+}$ мы имеем в виду, что предел должен существовать и равняться X_t , или, что эквивалентно, $\overline{\lim}_{s \downarrow t} |X_s - X_t| = 0$.